復刊

数理論理学序説

前原昭二 著

共立出版株式会社

まえがき

本書は，数理論理学の入門書である．その目的とするところは，まず第一に，いわゆる**記号論理**（symbolic logic）の大要を解説することであるが，それと同時に，読者が記号論理学における種々の手法のいくばくかを体得されることをも期待して書かれている．また，入門書としての性格を徹底させるために，これに必要な予備知識の量を極度に圧縮し，高等学校の程度をこえる数学上の知識を不要とするよう配慮はしたが，もちろん，読者にある程度の思考能力は仮定されている．しかし，一歩をゆずるとしても，大学初年級の数学を学びつつある学生にとっては理解しうる内容であると信ずる．

教育者としての著者のとぼしい経験によるものではあるが，数理論理学を学ぶ学生に共通の弱点は何かというと，それは，記号論理学の発生以来重要視されてきた数学的記号法の運用にあるのではなく，むしろ，その記号法を裏づけるところの内容，あるいは，それによって導かれた諸結果の解釈，総じて言うならば，記号論理を基礎づける思想の理解という面において多く現われ，しかも，そのような弱点は，しばしば学生をして安易なる哲学に導かしめるのである．かかる点を考慮に入れ，本書においては，記号論理の体系をあまくだりに記述してしまうというような方法はとらずに，それを読者とともに一歩一歩作り上げていくという形において叙述をすすめていくことにした．また，基本的な概念の解説に際しては，巧妙な言い回しによって困難をさけるというようなことはせずに，なるべく物事を正面から解決するという立場をとり，説明は拙劣であろうとも，たとえば〈変数を含む命題〉の解説（第Ⅱ編，§ 2）におけるがごとく，時として著者はあえて哲学者たらんとさえした．も

っとも，その解決法が至当なものであるかどうかということは，読者の判断に残された問題である．

本書が記号論理の体系の裏づけとなる思想を重視したとは言え，本書を読むのに何も哲学的予備知識を必要とするわけではない．思想の裏づけのない形式より以上に，具体的知識をともなわない哲学は，われわれの最も警戒しなければならぬところである．したがって，本書において第一に意を用いた点はといえば，それはもちろん，言うまでもないことではあるが，記号論理の構造とその形式についての解説である．そして，構造と形式を完全に理解するところから思想はおのずと生まれいずるであろうし，また思想とはそのようなものでなければならぬ．あるいは，完全な理解そのものが思想とよばれるものであるのかもしれない．

つぎに著者の考慮した点はと言えば，本書をさほどの特徴のない入門書とすることであった．著者の個性的な趣味が前面に押し出されている入門書の是非を一般的に論ずることは困難であるが，わが国におけるこの方面の著書一般の現況を考慮した場合，少なくとも今回は平凡な入門書を作るべきであると考えざるを得なかったのである．したがって，本書の構成も

第Ⅰ部　命題論理　　　第Ⅱ部　述語論理

という，まったくの因習的な分類法に従っている．ただ，そのような因習的分類法も利点がなかったわけではない．たとえば，記号論理の研究はつねにただ1種類の考え方をもとにして進められているというわけのものではなく，多様な方法があるのであるが，命題論理という構造の比較的単純な範囲を利用して，その多くの方法のうちの幾分かを紹介することが可能であった．さらには，その結果として，記号論理学の主要部分をなす述語論理の解説に当たっては，ただ一つの観点のみを基礎とすることも可能となり，そのためにかえって，述語論理に関する叙述を少

しでも統一的なものになし得たものと信じている．頁数だけを見れば，本書の大半が命題論理のために費されているが，それは述語論理の非重要性を示すものではない．それは，述語論理を重要視した結果の現われであるとさえ言いうる．第Ⅰ部の命題論理についての解説はすべて第Ⅱ部への準備のためのものであることを読者はご承知願いたいのである．

昭和 41 年 5 月 14 日

著　　者

目　　次

II. 述 語 論 理

はじめに

(Semantics と Syntax　超数学)

数理論理学の解説を始めるに当たって，まず，その研究方法に対する一般的注意を与えておく．

数理論理学 (mathematical logic) とは，数学に用いられる論理の構造を研究する数学の一部門である．したがって，そこでは〈命題〉とか〈推論〉それ自身が研究の対象となる．

さて，命題や推論そのものを研究するには，本質的に異なった二つの立場がある．その一つは semantics とよばれ，他の一つは syntax とよばれる．

Semantics :　命題や推論の**真偽や内容をもとにして**研究する立場

Syntax :　命題や推論の**真偽や内容には触れずに**，その形式上の構造にのみ着目して研究する立場

そこで，論理の研究に際しては，現在このいずれの立場に立って研究がなされているかということを，はっきりと意識しておかなければならない．さもないと，種々の誤解をまねき，無用の混乱をひき起こすことがあるからである．

Semantics は，論理を研究する方法としては，まったく常識的な立場といってよいから，これ以上の説明の必要はないであろう．問題はむしろ syntax のほうで，命題の真偽や推論の内容を考えずに論理の構造を研究する，ということが，初学者には何となく理解されにくい点を含むと思われるので，以下，射影幾何学における双対原理を例にとって，それを少しく説明してみよう．

そこでまず，平面射影幾何学に話を限って，双対原理なるものの要点を簡単に述べておく：

点と直線のみに関する**正しい**命題が与えられたとき，その命題の中の〈点〉ということばと〈直線〉ということばとを入れかえ，〈(点が直線)の上にある〉ということばと〈(直線が点) を通る〉ということばとを

入れかえてできる命題——最初に与えられた命題の**双対**——も**正しい**．これが**双対の原理**である．たとえば，

相異なる2点のいずれをも通る直線は一つあって，しかも一つに限る

という正しい命題の双対は

相異なる2直線のいずれの上にもある点は一つあって，しかも一つに限る

という正しい命題である．[1)]

双対原理の証明はつぎのように述べられる：　射影幾何学の公理の双対はすべて，ふたたび射影幾何学の公理となるか，または，射影幾何学の公理から導かれる定理である．したがって，与えられた定理の証明に現われる命題を全部その命題の双対に書きかえれば，与えられた定理の双対にいたる証明が得られる．よって，射影幾何学における定理の双対は，ふたたび射影幾何学の定理となることがわかる．

さて，上に述べた〈双対原理の証明〉において，〈点〉とか〈直線〉という名詞が何を意味しているか，〈…の上にある〉とか〈…を通る〉ということばが，点と直線とのどんな相互関係を意味しているか，ということを知っている必要があるであろうか？　というと，じつは，そのような必要は全然ないのであって，必要なのは，公理の双対がふたたび公理となるか，または公理から証明される定理である，という，まったくの形式的な事実を知っていることだけである．点とか直線の内容を知っているということは，双対原理の証明を理解するためには，じゃまにこそなれ，何の益するところもない．

射影幾何学の双対原理は，〈点〉，〈直線〉，〈…の上にある〉，〈…を通る〉などのことばの内容をまったく度外視して，ただ公理の形式のみに着目する，ということによってのみ得られる定理である．そして，このような研究方法が syntactical な（すなわち，syntax における）方法というものである．

われわれは，双対原理は一つの〈定理〉である，といった．少なくと

1）射影幾何学とは，初等幾何学の言葉を借りていえば，〈無限遠点〉や〈無限遠直線〉をも含めた幾何学である．よって，この命題は正しい．

も，われわれは双対原理を〈証明する〉ことができるのである．しかし，双対原理は射影幾何学**における**定理ではない．とにかく，射影幾何学の公理**から証明される**定理ではない．そうではなくて，双対原理は射影幾何学**についての**定理である．射影幾何学が点や直線に関する理論であるのに反して，双対原理は，射影幾何学における証明に関する理論における定理なのである．射影幾何学のなかに身をおいて考える限り，双対原理は何かしら不思議な力をもつ神秘的な原理でしかない．双対原理の本質を知るためには，是非とも，射影幾何学より一段高い立場に身をおいて，射影幾何学を見渡してみる必要がある．

数学的証明を研究の対象とする理論を**証明論**（Beweistheorie, proof theory）とよぶ．たとえば，双対原理は証明論における定理である．

証明論のように，数学的理論を一段高い立場から考察する場合には，研究の対象となっている理論を単に**数学**（mathematics）とよび，数学を研究の対象とする理論のことを**超数学**（metamathematics）とよんで，これらを区別する．研究の対象が**論理**（logic）である場合には，それを研究する理論を**超論理**（metalogic）というのである．

〈超数学〉とか〈超論理〉といっても，そこに特別な考え方があるわけではない．これもまた普通の数学的理論にすぎない．ただ，そこでは，数学における〈命題〉や〈証明〉などが研究の対象として現われ，それらに関する〈超数学的命題〉や〈超数学的証明〉などとの混同を避けるために，このような名称を用いるのである．

数学と超数学との区別は，超数学の研究に際しては重要であるけれども，それは便宜上の問題で，そこに絶対的な差異があるわけではない．たとえば，代数方程式の解法に関する〈Galois の理論〉や，初等幾何学での〈作図不能の証明〉などは，〈解法〉や〈作図〉に関するある種の超数学であるが，それらは，普通には，〈数学〉における理論ということになっている．数学と超数学とを対比させることが必要になるときにのみ，〈超数学〉という名称を必要とするのである．

数理論理学の解説は，その性質上，すべて超数学的あるいは超論理的な立場においてなされる．その上で，その研究対象となっている命題の真偽や推論の内容を〈よりどころ〉として研究するのが semantics で，

研究の対象となっている命題や推論の形式的な構造にのみ着目するのがsyntax なのである．ただし，syntax において命題の真偽や推論の内容を考えない，といっても，それは〈数学〉における命題や推論についてのみであって，〈超数学〉における命題や推論の真偽や内容についていっているのではない．

〈超数学的定理〉は，しばしば**超定理**（metatheorem）とよばれるが，それは**正しい**命題でなければならず，超定理の証明たる〈超数学的証明〉は**内容のよくわかる**証明でなければならない．

I. 命 題 論 理

§1. 真 理 関 数

この§では，**命題論理**（propositional logic）なるものを semantics の立場において考察する．

命題論理を semantics の立場で研究する場合には，そこで取り扱う命題はすべて**真偽の定まった命題**のみであるとする．したがって，たとえば〈$a+1=b$〉とか，あるいは〈$x<y$〉のように，変数を含んだ命題は，変数に具体的な数を代入しないうちは，それを真とも偽とも判定することができないから，命題論理の対象からは除かれる．

命題論理では，**命題の内容的意味には立ち入らずに**，その**真偽だけを問題にする．** したがって，真偽の一致した命題は区別せずに取り扱う．

真（true）**な命題**を表わす記号：∨

偽（false）**な命題**を表わす記号：人

結局のところ，命題論理で**命題**（proposition）とよぶのは ∨ と 人 の二つだけなのである．

われわれは，命題 ∨ および 人 を，いずれとも限定せずに表わそうとするときに

$$A,\ B,\ C,\ \cdots$$

などの文字を用いる．これを**命題変数**（proposition variable）とよぶ．命題変数に代入しうる〈定数〉は ∨ と 人 のみである．

n 個の命題の組 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ に一つの命題を対応させる〈関数〉を n 変数の**真理関数**（truth function）という．すなわち，真理関数とは，独立変数を命題変数とする命題値関数である．

一つの命題変数の値のとり方は ∨ と 人 との 2 とおりである．したがって，n 個の命題変数の値のとり方は全部で 2^n とおりとなる．n 変数の真理関数においては，n 個の独立変数の 2^n とおりの値のとり方のおのおのに対して，∨ または 人 が対応しているのであって，逆に，この対応を定めれば，n 変数の真理関数が一つ定まる．よって，n 変数の真理関数は全体として 2^{2^n} 個あることになる．

例　1変数 X の真理関数は全部で4個ある．関数値がつねに Y であるものが一つ，関数値がつねに 人 であるものが一つ．また，命題 X に X を対応させるものが一つある．残りの一つは，X が Y のときの関数値が 人 で，X が 人 のときの関数値が Y となるものであり，通常〈X の否定〉とよばれているものである．

命題論理では命題の真偽以外の要素は考えないことにした．しかし，もし命題の真偽以外の内容というようなものまでを考えに入れるとすれば，命題 X_1, X_2, …, X_n の関数 $F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の関数値は，X_1, X_2, …, X_n の真偽だけで定まるとは限らない．〈真理関数〉というのは，独立変数の真偽のみによって関数値の真偽が定まる関数のことである．

1. 否定 (negation)　命題変数 A の値が Y であるとき関数値 人 をとり，A の値が 人 のとき関数値が Y となる1変数 A の命題関数を〈A の否定〉とよび，$\neg A$ という記号で表わす．$\neg A$ は，普通の言葉で〈A **でない**〉といわれる命題を表わしている．

この $\neg A$ の定義を見やすくするために，つぎのような表で示す：

A	$\neg A$
Y	人
人	Y

このような表を〈$\neg$ の**真理表** (truth table)〉という．

2. 論理和 (disjunction, logical sum)　2変数 A, B の真理関数で，A と B との少なくとも一方の値が Y のときの関数値が Y で，A, B の両方が 人 であるときにのみ関数値 人 をとるものを，A および B の **disjunction** とよび，$A \vee B$ という記号で表わす．この定義を真理表で示せば

A	B	$A \vee B$
Y	Y	Y
Y	人	Y
人	Y	Y
人	人	人

となる．$A \vee B$ を〈A **または** B〉と読む．上の定義から明らかなように，これは〈A, B の**少なくとも一方**が真である〉という意味の命題を表わしているのであって，〈A, B のうちの**一方だけが**真である〉ということを表わしているのではない，ということには一応の注意を要するであろう．

3. **論理積** (conjunction, logical product)　2変数 A, B の真理関数で，A と B の値が両方とも Y であるときのみ関数値 Y をとり，A と B の少なくとも一方の値が 人 であるときの関数値が 人 であるものを，A, B の **conjunction** とよび，$A \wedge B$ という記号で表わす．この定義を真理表で示せば

A	B	$A \wedge B$
Y	Y	Y
Y	人	人
人	Y	人
人	人	人

となる．$A \wedge B$ は普通に〈A **and** B〉といわれる命題を表わしている．

〈論理和〉，〈論理積〉ということばは，あまり適切な名称ではない．〈和〉とか〈積〉とかに特別の意味があるわけではなく，場合によっては disjunction のほうが〈積〉とよばれていることさえある．よって本書では，英語を用いて disjunction, conjunction とよぶことにする．

4. **同値** (equivalence)　$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ という式で表わされる命題関数を $A \sim B$ という記号で表わし，〈A と B とは**同値** (equivalent) である〉と読む．ここで，$\neg A \wedge \neg B$ というのは，詳しくは

$$(\neg A) \wedge (\neg B)$$

ということであるが，これからは，$\neg$ は命題の符号と考えて，数についている符号 ＋，－ と同様に取り扱い，括弧は省略することにする．

さて，$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理表をつくれば，つぎのようになる：

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\wedge B$	$\neg A\wedge\neg B$	$(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$
⋎	⋎	⋏	⋏	⋎	⋏	⋎
⋎	⋏	⋏	⋎	⋏	⋏	⋏
⋏	⋎	⋎	⋏	⋏	⋏	⋏
⋏	⋏	⋎	⋎	⋏	⋎	⋎

すなわち，$A{\sim}B$ の真理表は

A	B	$A{\sim}B$
⋎	⋎	⋎
⋎	⋏	⋏
⋏	⋎	⋏
⋏	⋏	⋎

となる．要するに，$A{\sim}B$ は，A と B が等しい値をとるとき ⋎ で，異なる値をとるとき ⋏ となる真理関数である．意味をとっていえば，$A{\sim}B$ という命題が真であるとは，A と B とが〈等しい〉命題であるということである．そして，命題が〈等しい〉とは，その真偽が一致している，ということである．この意味において，$\sim$ という記号は，命題同志の $=$ に相当している．

さて，ここで，現在のわれわれの研究の立場を明らかにしておこう．われわれは，いま，二つの命題 ⋎ と ⋏ とを研究の対象として選び，そこで定義される命題値関数としての真理関数を調べている．研究方法は semantics の方法であるが，研究の立場としては〈超数学〉ないしは〈超論理〉の立場をとっている．したがって，当然のことながら，超論理的命題を用いて研究を進めている．たとえば，二つの命題 A，B が等しい，という超論理的命題を $A=B$ という記号で示そうと思うのであるが，それは，A，B を独立変数とする命題関数 $A{\sim}B$ とは区別しなければならない．ただし，$A{\sim}B$ の値が ⋎ となる必要十分条件は $A=B$ となることである，ということにはなっている．

超論理的命題が〈正しい〉とか〈まちがっている〉とかいうことと，われわれの研究対象となっている命題 ⋎ とか ⋏ とかいうものとの間には，直接的には，何の関係もない．少なくとも，何の関係もない，と考

えるべきなのである．であるから，以後は，$\curlyvee$ と $\curlywedge$ とは，単に二つの異なった対象を表わす記号として，内容的な〈真〉とか〈偽〉とかいう概念とは切り離して考えるほうがわかりよいであろう．〈真〉とか〈偽〉とかいうことばは単に $\curlyvee$ および $\curlywedge$ についている名称にすぎず，超論理的な真偽とはまったく無関係なものなのである．

しかし，われわれの研究は依然として semantics の範囲に属しているので，それは，真理関数というものが，はっきりとした内容をもつ関数である，という意味においてである．ここでいう真理関数の〈内容〉とは，〈または〉とか〈and〉とかいう言葉の内容ではない．そうではなくて，独立変数の値をすべて定めれば関数値が定まる，という事実を意味しているにすぎない．

話をもとにもどして，真理関数に関する超論理的公式のうち基本的なものを以下に述べる．まず，

$$\neg\curlyvee=\curlywedge \qquad \neg\curlywedge=\curlyvee$$
$$\curlyvee\vee A=\curlyvee \qquad \curlywedge\wedge A=\curlywedge$$
$$\curlywedge\vee A=A \qquad \curlyvee\wedge A=A$$

などは，すべて $\neg$，$\vee$，$\wedge$ の定義から明らかであろう．

二重否定の法則（law of double negation）

$$\neg\neg A=A$$

排中律（law of the excluded middle, tertium non datur）

$$A\vee\neg A=\curlyvee$$

矛盾律（law of contradiction）

$$A\wedge\neg A=\curlywedge$$

ベキ等律（＝冪等律，idempotent law）

$$A\vee A=A \qquad A\wedge A=A$$

交換律（commutative law）

$$A\vee B=B\vee A \qquad A\wedge B=B\wedge A$$

結合律（associative law）

$$A\vee(B\vee C)=(A\vee B)\vee C$$
$$A\wedge(B\wedge C)=(A\wedge B)\wedge C$$

分配律（distributive law）

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

吸収律 (absorption law)

$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (A \wedge B) = A$$

De Morgan の法則

$$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$
$$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

これらのうち，二重否定の法則，排中律，矛盾律，ベキ等律，交換律までは，定義に直接あたるのが簡単である．

結合律の証明　二つのうちのいずれの証明も同様であるから，最初のものについてのみ述べる．そして，それには，$A=$Y のときと，$A=$人 のときの二つの場合に分けて証明する．

1)　$A=$Y の場合．

$$\text{Y} \vee (B \vee C) = \text{Y}$$
$$(\text{Y} \vee B) \vee C = \text{Y} \vee C = \text{Y}$$

ゆえに

$$\text{Y} \vee (B \vee C) = (\text{Y} \vee B) \vee C$$

2)　$A=$人 の場合．

$$\text{人} \vee (B \vee C) = B \vee C$$
$$(\text{人} \vee B) \vee C = B \vee C$$

ゆえに

$$\text{人} \vee (B \vee C) = (\text{人} \vee B) \vee C$$

分配律の証明　やはり第一のものだけを証明する．

1)　$A=$Y の場合．

$$\text{Y} \wedge (B \vee C) = B \vee C$$
$$(\text{Y} \wedge B) \vee (\text{Y} \wedge C) = B \vee C$$

ゆえに

$$\text{Y} \wedge (B \vee C) = (\text{Y} \wedge B) \vee (\text{Y} \wedge C)$$

2)　$A=$人 の場合．

$$\text{人} \wedge (B \vee C) = \text{人}$$
$$(\text{人} \wedge B) \vee (\text{人} \wedge C) = \text{人} \vee \text{人} = \text{人}$$

ゆえに

$$\text{人}\wedge(B\vee C)=(\text{人}\wedge B)\vee(\text{人}\wedge C$$

吸収律の証明　第一のものだけを示す.

1)　$A=\text{丫}$ の場合.

$$\text{丫}\wedge(\text{丫}\vee B)=\text{丫}\vee B=\text{丫}$$

2)　$A=\text{人}$ の場合.

$$\text{人}\wedge(\text{人}\vee B)=\text{人}$$

De Morgan の法則の証明　第一のものだけを示す.

1)　$A=\text{丫}$ の場合.

$$\neg(\text{丫}\vee B)=\neg\text{丫}=\text{人}$$

$$\neg\text{丫}\wedge\neg B=\text{人}\wedge\neg B=\text{人}$$

ゆえに

$$\neg(\text{丫}\vee B)=\neg\text{丫}\wedge\neg B$$

2)　$A=\text{人}$ の場合.

$$\neg(\text{人}\vee B)=\neg B$$

$$\neg\text{人}\wedge\neg B=\text{丫}\wedge\neg B=\neg B$$

ゆえに

$$\neg(\text{人}\vee B)=\neg\text{人}\wedge\neg B$$

ここでは，真理関数のうち $\neg$，$\vee$，$\wedge$ の三つだけに重点をおいて述べたけれども，それは，任意の真理関数を，この三つの真理関数の組み合わせとして表現することができるからである．そのことについては，§3において触れるであろう．

練 習 問 題

1.　$\text{丫}\vee A$，$\text{人}\vee A$，$\text{丫}\wedge A$，$\text{人}\wedge A$ の真理表を作り，

$$\text{丫}\vee A=\text{丫},\qquad \text{人}\wedge A=\text{人},$$

$$\text{人}\vee A=\text{丫}\wedge A=A$$

を確かめよ．

2.　真理表を用いて

$$A\sim B=(\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

となることを示せ．

3. $$\neg(A \sim B) = A \sim \neg B = \neg A \sim B$$
を証明せよ．

4. $A \wedge B$ および $A \vee B$ は，それぞれ
$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B), \quad A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$
と表わされる．

5. $$A \mid B = \neg(A \wedge B)$$
によって定義される真理関数 $A \mid B$ の真理表を作れ．

注意 この真理関数を **alternative denial**, これを表わす記号 | を **Sheffer の記号** (Sheffer stroke) という．

6. Sheffer の記号を用いれば，$\neg A$ および $A \wedge B$ は，それぞれ
$$\neg A = A \mid A, \quad A \wedge B = (A \mid B) \mid (A \mid B)$$
と表わされる．

7. $A \vee B$ を Sheffer の記号を用いて表わせ．

§2. Boole 代数

この§では，〈Boole 代数〉や〈束〉というものについての簡単な解説を行なう．命題論理そのものから，話は一応それるけれども，十分に深い関係のある分野なのである．

1. 集合 L において，L の任意の二つの元 a, b に対して，$a \vee b$ および $a \wedge b$ と表わされる L の元が（それぞれ一つずつ）対応し，

交換律 $a \vee b = b \vee a$　　　$a \wedge b = b \wedge a$

結合律 $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$　　　$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

吸収律 $a \wedge (a \vee b) = a$　　　$a \vee (a \wedge b) = a$

が成立しているとき，このような L を**束**（英 lattice, 独 Verband）といい，$a \vee b$ のことを a と b との**結び**（join），$a \wedge b$ のことを**交わり**（meet）とよぶ．$\vee$ と $\wedge$ とは束を定義する基本的な演算であって，**束演算**（lattice operation）とよばれる．

例 1.

$$L = \{\forall,\ 人\}$$

とおけば，[1] この L は，$\bigvee$ (or) と $\bigwedge$ (and) を束演算とする束となっている．

例 2. ある集合 M の部分集合の全体を M の**ベキ集合**（＝冪集合，独 Potenzmenge）とよび，2^M と表わす．すなわち，

$$2^M = \{\ A\ ;\ A \subseteq M\ \}$$

である．[2] 2^M の元（すなわち，M の部分集合）A および B の和集合 $A \cup B$，共通部分 $A \cap B$ はふたたび 2^M の元となり，2^M はこの $\cup$，$\cap$ を束演算として束をなしている．

束においては，$\vee$ とか $\wedge$ についての結合律がなりたち，$a \vee (b \vee c)$ と $(a \vee b) \vee c$，および，$a \wedge (b \wedge c)$ と $(a \wedge b) \wedge c$ とを区別する必要がないので，これらをともに，それぞれ $a \vee b \vee c$ とか $a \wedge b \wedge c$

1）$\{a,\ b\}$ とは，a と b だけを元とする集合を表わす記号である．一般に，a_1, a_2, … だけを元とする集合を $\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$ という記号で表わす．

2）$\{x;\ \cdots\}$ とは，…という条件を満たす x 全体からできる集合を表わす記号である．

という記号で表わす．また四つ以上の元の結びや交わりについてもまったく同様で

$$a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n \qquad \text{とか} \qquad a_1 \cap a_2 \cap \cdots \cap a_n$$

という記法を用いることができる．しかも，$\cup$ および $\cap$ に関する交換律があるから，この a_1，a_2，…，a_n の順序も問題にならない．場合によっては，これら n 個の元の結びや交わりを，それぞれ

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{および} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} a_i$$

という記号で表わすこともある．

例 3． n 個の命題 A_1，A_2，…，A_n の disjunction

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

および conjunction

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

をそれぞれ

$$\bigvee_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{および} \qquad \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$$

という記号で表わす．

2. 集合 M のベキ集合 2^M という束においては，2^M の元である 2 集合 A，B の間の包含関係 $A \subseteq B$ は，和集合を表わす記号 $\cup$ を用いることにより，

$$A \cup B = B$$

という等式で示すことができる．共通部分の記号 $\cap$ で表わされた等式

$$A \cap B = B$$

は，$A \supseteq B$ を意味している．この関係を一般の束に拡張して：

定義 $a \cup b = b$ という関係が成立することを，$a \leq b$ という記号で表わす．

定義 $a \cap b = b$ という関係が成立することを，$a \geq b$ という記号で表わす．

この $\leq$ と $\geq$ のように，$\cup$ と $\cap$ とを入れかえて定義される概念を，互いに他の**双対** (dual) という．とくに，$\cap$ は $\cup$ の双対であり，$\cup$ は $\cap$ の双対である．

定理 1． $a \leq b$ と $b \geq a$ とは同じことである．すなわち，$a \leq b$ と

なる必要十分条件は $b \geq a$ となることである.

この定理1を証明するために, 二つの補助定理を証明する：

補助定理 1. $a \leq b$ ならば $b \geq a$.

証明 $a \leq b$ の定義は $a \cup b = b$.

$\therefore \qquad a \cap b = a \cap (a \cup b).$

この式の右辺は a に等しく (吸収律), 左辺に交換律を用いて

$$b \cap a = a.$$

これは, $\geq$ の定義によれば, $b \geq a$ ということである.

補助定理 2. $a \geq b$ ならば $b \leq a$.

証明 $a \geq b$ の定義は $a \cap b = b$.

$\therefore \qquad a \cup b = a \cup (a \cap b).$

この式の右辺は a に等しく (吸収律), 左辺に交換律を用いて

$$b \cup a = a.$$

これは, $\leq$ の定義によれば, $b \leq a$ ということである.

定理1の証明 $\langle b \geq a \rangle$ が $\langle a \leq b \rangle$ のための必要条件であることは補助定理1そのものである. また, 補助定理2によれば, $\langle b \geq a \rangle$ から $\langle a \leq b \rangle$ は導かれる. すなわち, $\langle b \geq a \rangle$ は $\langle a \leq b \rangle$ の十分条件でもある.

さて, 補助定理1における $\leq$ を $\geq$ で置きかえ, $\geq$ を $\leq$ で置きかえれば, 補助定理2となる. さらに証明においても, 補助定理1の証明中の $\leq$ と $\geq$ とを入れかえ, $\cup$ と $\cap$ とを入れかえれば, 補助定理2の証明が得られる.

この事実は, つぎのように, さらに一般的に述べることができる：

束に関する命題において, その命題に現われる束に関する概念をすべてその双対概念で置きかえて得られる命題を, もとの命題の**双対**というのであるが, 任意の束に対して成立する命題の双対はやはり任意の束に対して成立する.

これを**双対の原理** (principle of duality) という.

双対の原理の正しいことは, 束の公理, すなわち, 交換律・結合律・吸収律のおのおのの双対がすべて, ふたたび束の公理となっていることをみれば明らかである.

定理 2. $a\cup a=a$　　$a\cap a=a$　　(ベキ等律)

証明 吸収律によれば，

$$a=a\cap(a\cup b)$$

であるから，$a\cup a$ の2番目の a に $a\cap(a\cup b)$ を代入して，

$$a\cup a=a\cup(a\cap(a\cup b)). \qquad (1)$$

つぎに，吸収律

$$a=a\cup(a\cap b)$$

が任意の b に対して成立することを利用し，この b に $a\cup b$ を代入すれば，

$$a=a\cup(a\cap(a\cup b)). \qquad (2)$$

(1)，(2) の右辺は等しいから

$$a\cup a=a. \qquad (3)$$

$a\cap a=a$ は (3) の双対であるから，証明するまでもない（双対の原理！）.

定理 3.

1) $a\leq a$

2) $a\leq b$，$b\leq a$ ならば $a=b$

3) $a\leq b$，$b\leq c$ ならば $a\leq c$

すなわち，$\leq$ という関係は 1) **反射的** (reflexive) であり，2) **反対称的** (anti-symmetric) であり，3) **推移的** (transitive) である.

証明 1) $a\leq a$ は，$\leq$ の定義によれば $a\cup a=a$ ということであり，これは〈ベキ等律〉である（定理2）.

2) $a\leq b$ および $b\leq a$ の定義は，それぞれ

$$a\cup b=b, \qquad b\cup a=a.$$

この二つを仮定すれば，交換律 $a\cup b=b\cup a$ により

$$a=b.$$

3) $a\leq b$，$b\leq c$ を仮定することは

$$a\cup b=b, \qquad b\cup c=c$$

の二つを仮定することである.

$$\begin{aligned} a\cup c &= a\cup(b\cup c) && [b\cup c=c] \\ &= (a\cup b)\cup c && [\text{結合律}] \\ &= b\cup c && [a\cup b=b] \end{aligned}$$

$$=c \qquad\qquad [b \cup c=c]$$

すなわち

$$a \cup c=c.$$

これは，証明すべき命題 $a \leq c$ そのものである．

3. 集合 L の任意の二つの元 a, b に対して，$a \leq b$ という関係が成立しているか，あるいは成立していないか，ということがつねに定義されており，しかも，この関係 $\leq$ が

反射律 $a \leq a$

反対称律 $a \leq b$, $b \leq a$ ならば $a=b$

推移律 $a \leq b$, $b \leq c$ ならば $a \leq c$

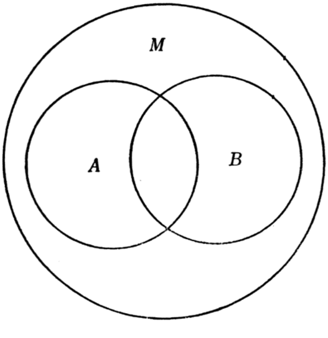
を満たしているとき，この L のことを**半順序集合** (partially ordered set, partly ordered set) または単に**順序集合** (ordered set) という．

たとえば，定理3によれば，束における $a \leq b$ という関係を $a \cup b=b$ として定義することにより，任意の束は順序集合となっている．とくに，ある集合のベキ集合は，集合の包含関係 $\subseteq$ に関して順序集合をなす．

順序集合の2元 a, b に対して

$$a \leq b \quad \text{または} \quad b \leq a$$

のうちの少なくとも一方が成立しているとき，この二つの元 a, b は**比較可能** (comparable) である，という．



順序集合の任意の2元がつねに比較可能であるとは限らない．たとえば，ある集合 M の部分集合 A, B で，

$$A \subseteq B \quad \text{でもなく}$$

また

$$B \subseteq A \quad \text{でもない}$$

というものがありうることは，容易に確かめることができる．

任意の2元が比較可能である順序集合を**全順序集合** (totally ordered set) または**線形順序集合** (linearly

ordered set）あるいは単に**鎖**（chain）とよぶ．

たとえば，実数の集合は，普通の大小関係を順序関係として，全順序集合となっている．

$b\leq a$ ということを $a\geq b$ と書くこともある（束における $\geq$ に関しては，定理1参照）．$\geq$ のことを $\leq$ の**逆の関係**（inverse relation）という．$\leq$ は $\geq$ の逆の関係である．

ある関係によって順序集合となっている集合は，その関係に対する逆の関係によっても順序集合となっている．すなわち，$\leq$ という関係が反射律・反対称律・推移律をみたしていれば，$\geq$ に関しても

反射律　$a\geq a$

反対称律　$a\geq b$，$b\geq a$ ならば $a=b$

推移律　$a\geq b$，$b\geq c$ ならば $a\geq c$

が成立している．このことを，順序集合に関する**双対の原理**という．

$\leq$ を順序とする順序集合 L を $\geq$ を順序とする順序集合と考える場合には，ただの〈集合〉としては同じ集合ではあるが，〈順序集合〉としては異なったものと考え，L の**双対**とよぶ．

順序集合においても，$\leq$ と $\geq$ とを入れかえて得られる概念や命題を，もとの概念や命題の**双対**という．束を順序集合と考える場合には，束としての〈双対〉と，順序集合としての〈双対〉とは完全に一致している．

定義　$a\leq b$ であってしかも $a\neq b$ であることを $a<b$ と書く．また，$a\geq b$ であって $a\neq b$ であることを $a>b$ と書く．

$a<b$ と $b>a$ とは同じことであり，しかも，$<$ と $>$ とは互いに他の双対概念になっている．

この記号を用いれば，反対称律は

$$a<b \text{ ならば } b<a \text{ ではない}$$

と述べることができる．これが〈反対称〉といわれる理由であろう．

また，順序集合における2元 a，b が〈比較可能〉であるとは

$$a<b \quad \text{か} \quad a=b \quad \text{か} \quad a>b$$

のいずれかが成立する，ということになる．この双対は

$$a>b \quad \text{か} \quad a=b \quad \text{か} \quad a<b$$

ということで，それは，a と b が比較可能であるということ，それ自身である．このように，その双対と同じになってしまうものは，**自己双対的** (self-dual) であるとよばれる．たとえば，順序集合が〈線形〉である，というのも，順序集合に関する自己双対的な性質である．

定義 順序集合 L の部分集合 M の任意の元 x が，L の元 a とつねに $x \leq a$ という関係にあるとき，すなわち

$$x \in M \quad \text{ならば} \quad x \leq a$$

であるとき，a を M の**上界** (upper bound) という．

定義 順序集合 L の部分集合 M と L の元 a との間に

$$x \in M \quad \text{ならば} \quad a \leq x$$

という関係があるとき，a を M の**下界** (lower bound) という．

例 4． 実数全体の集合を普通の大小関係を順序として順序集合と考えるとき，自然数全体の集合

$$N = \{ 1, 2, 3, \cdots \}$$

はその部分集合ではあるが，N の上界は存在しない．

(**Archimedes の原理**)

〈上界〉と〈下界〉とは，互いに他の双対概念である．

定義 順序集合 L と L の部分集合 M が与えられたとき，つぎの性質 1)，2) を満たす L の元 a のことを M の**上限** (supremum) という：

1) a は M の上界である．

2) x が M の上界ならば $a \leq x$.

すなわち，M の上限とは，M の**最小の上界** (least upper bound) である．

定義 〈上限〉の双対概念を**下限** (infimum) という．

すなわち，下限とは**最大の下界** (greatest lower bound) である．

記号 集合 M の上限を $\sup M$，下限を $\inf M$ と表わす．

例 5． L を，有理数全体を普通の大小関係を順序として考えた順序集合とする．

$$M = \{ x \ ; \ x^2 < 2 \}$$

という L の部分集合 M は，この L において上界（たとえば，2 という有理数）をもつが，この L においては，$\sup M$ は存在しない

（$\sqrt{2}$ は無理数！）．

例 6．普通の大小関係を順序とする実数全体からなる順序集合においては，つぎの定理が成立する：

部分集合 M が上界をもてば $\sup M$ が存在する．

（Weierstrass の定理，実数の連続性）

定理 4．順序集合 L において部分集合 M の上限 $\sup M$ が存在すれば，$\sup M$ と表わされる L の元はただ一つしかない．inf についても同様である．

証明　a および a' を M の上限とする．a' は M の上界で，a は M の最小上界であるから $a \leq a'$．まったく同様にして $a' \leq a$．ゆえに $a=a'$．

定理 5．束においては

1)　$a \vee b = \sup\{a, b\}$

2)　$a \wedge b = \inf\{a, b\}$

証明　1)　まず，$a \vee b$ が $\{a, b\}$ の上界であることを示す：

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b.$$

よって，$\leq$ の定義によれば

$$a \leq a \vee b.$$

$a \vee b = b \vee a$ に注意すれば，同様にして

$$b \leq a \vee b.$$

つぎに，x を $\{a, b\}$ の任意の上界とする．$\leq$ の定義によれば

$$a \vee x = x, \qquad b \vee x = x$$

と仮定したことになる．そうすれば，

$$(a \vee b) \vee x = a \vee (b \vee x) = a \vee x = x$$

ふたたび $\leq$ の定義によって，

$$a \vee b \leq x.$$

すなわち，$a \vee b$ は $\{a, b\}$ の最小上界である．

2)　は 1)　の双対．

定理 6．束においては

1)　$\bigcup_{i=1}^{n} a_i = \sup\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

2)　$\bigcap_{i=1}^{n} a_i = \inf\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

証明 1) のみを証明する.

n に関する数学的帰納法.

1. $n=1$ の場合.

$$\bigcup_{i=1}^{1} a_i = a_1 \qquad \text{(定義)}$$

であるから,

$$\sup\{a_1\} = a_1$$

を示せばよいのであるが，これは〈上限〉の定義により,

i) a_1 は $\{a_1\}$ の上界である

ii) x が $\{a_1\}$ の上界ならば $a_1 \leq x$

であることを確かめればよい. しかし，この i) および ii) は，いずれも〈上界〉の定義から明らかである.

2. $n>1$ の場合.

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) \vee a_n$$

を用いる. 帰納法の仮定により, $\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i$ は $\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ の上界（実は，上限）であるから,

$$a_k \leq \bigcup_{i=1}^{n-1} a_i \leq \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) \vee a_n = \bigcup_{i=1}^{n} a_i \quad (1 \leqq k \leqq n-1)$$

となり，また

$$a_n \leq \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i\right) \vee a_n = \bigcup_{i=i}^{n} a_i$$

となる. ゆえに, $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$ は $\{a_1, \cdots, a_n\}$ の上界となり，したがって,

あとは, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ の任意の上界を x として, $\bigcup_{i=1}^{n} a_i \leq x$ となる, ということを示せばよい. そこで, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ の任意の上界を x とすると，まず

$$a_n \leq x$$

となる. また, x は $\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ の上界でもあるから，ふたたび帰納法の仮定を用いて,

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i = \sup\{a_1, \cdots, a_{n-1}\} \leq x.$$

よって，

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i = (\bigcup_{i=1}^{n-1} a_i) \vee a_n \leq x. \qquad \text{(証明終り)}$$

この定理6によって，

$$a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n \qquad \text{および} \qquad a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$$

において，括弧が不要であること，ならびに，a_1，a_2，…，a_n の順序はどうでもよい，ということの別証明も得られたわけである．

4.　こんどは，任意の二つの元 a，b からできる部分集合 $\{a, b\}$ がつねに上限および下限をもつ順序集合は束をなす，ということを示そうと思う．そこで，L を順序集合とし，L の任意の2元 a，b に対して $\sup\{a, b\}$ および $\inf\{a, b\}$ という L の元が存在する，とする．先まわりをして，$\sup\{a, b\}$ のことを $a \vee b$，$\inf\{a, b\}$ のことを $a \wedge b$ と表わすことにしておく．すると，この $\vee$ および $\wedge$ に関して

交換律	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
結合律	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
吸収律	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$

が成立する．

交換律の証明　定義より明らか（定理4参照）．

結合律の証明　まず，

$$a \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c \qquad (1)$$

$$b \leq a \vee b \leq (a \vee b) \vee c \qquad (2)$$

$$c \leq (a \vee b) \vee c \qquad (3)$$

は明らか．（2）と（3）より

$$b \vee c \leq (a \vee b) \vee c.$$

これと（1）より

$$a \vee (b \vee c) \leq (a \vee b) \vee c.$$

同様にして

$$(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c).$$

よって，

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$$

$\wedge$ に関する結合律は，$\vee$ に関する結合律の双対である．

吸収律の証明 まず，

$$a \wedge (a \vee b) \leq a \tag{1}$$

に注意する．つぎに

$$a \leq a, \quad a \leq a \vee b$$

の２式より

$$a \leq a \wedge (a \vee b). \tag{2}$$

(1)，(2) より

$$a \wedge (a \vee b) = a.$$

もう一つの吸収律は，これの双対（証明終り）．

これで，L が束になることはわかったが，束 L には，$\vee$ とか $\wedge$ をもとにして，ふたたび順序を導入することができる．それが果たして，L に初めからあった順序 $\leq$ と一致するかどうかは，けっして自明のことではない．そこで，それをはっきりさせるためには，つぎの定理を証明する必要がある．

定理 7． $a \leq b$ となる必要十分条件は，$a \vee b = b$ となることである．

証明 1) **必要性** $a \leq b$ ならば，b は $\{a, b\}$ の上界であるから

$$a \vee b \leq b.$$

また，$a \vee b$ が $\{a, b\}$ の上界であることから

$$b \leq a \vee b.$$

ゆえに

$$a \vee b = b.$$

2) **十分性** $a \vee b = b$ ならば，b は $\{a, b\}$ の上界であるから

$$a \leq b. \qquad \text{(証明終り)}$$

以上によって，〈束〉というものを，任意の２元の上限および下限が存在する順序集合，として定義しても，まえに述べた定義とあらゆる点について同じことになる，ということがわかった．

例 6．〈平面幾何〉を考えることにし，平面上のすべての点，すべての直線，ならびに全平面および空集合からなる集合族を L とする．ここで〈集合族〉といったのは，点というものを，その１点だけを元とする集合と考える，という意味である．

さて，この L は，集合の包含関係 $\subseteq$ によって順序集合を作る．し

かも，L の任意の2元（それは，空集合，点，直線，全平面，のうちのどれか）には必ず上限も下限も存在する．よって，L は束をなす．

ここで，$a \wedge b$ は a と b との共通部分を意味する．すなわち，辞義どおりに〈交わり〉である．a, b が相異なる2直線ならば，$a \wedge b$ は a, b の交点である．

$a \vee b$ は，a と b の和集合ではない．たとえば，a, b が相異なる2点であれば，$a \vee b$ は2点 a, b を通る直線，すなわち，a, b の〈結び〉である．

〈幾何学〉における普通の意味での双対は，束 L における双対と完全に一致している．

例 7. 0および自然数の合体からなる集合

$$N = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

を考える．N の2元 a, b に対する，a が b の約数である，または，同じことであるが，b が a の倍数である，という関係を $a|b$ と表わす．しからば N は，$|$ という関係によって順序集合をなしている：

反射律 $a|a$

反対称律 $a|b$, $b|a$ ならば $a=b$

推移律 $a|b$, $b|c$ ならば $a|c$

この N もまた束をなしている．a, b の上限 $a \vee b$ は a, b の最小公倍数で，$a \wedge b$ は最大公約数である．

ただし，整数論においては，上の順序集合の双対を考えるのが普通である，ということに注意しておこう．普通には，$a \vee b$ が最大公約数で，$a \wedge b$ が最小公倍数なのである．

順序集合の部分集合 $\{a_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ に上限あるいは下限の存在する場合には，束演算の記号 $\vee$ および $\wedge$ を流用して，これらを，それぞれ

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \quad \text{および} \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

と表わすことがある．すなわち，

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \sup\{a_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda = \inf\{a_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$$

5. 分配律

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

の成立する束のことを**分配束** (distributive lattice) という．

例 8． $\{\mathsf{V}, \mathsf{\Lambda}\}$ は束演算 $\vee$, $\wedge$ に関して分配束をなす（§1参照）．

さて，二つの分配律のうち一方が成立していれば，他方はそれから証明できるのである．それを以下に示そう．

どちらも同じこと（双対）であるから，

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (*)$$

が成立すると仮定する．$x=a \vee b$, $y=a$, $z=c$ とおくと，

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c).$$

この式の右辺にある $(a \vee b) \wedge a$ は交換律と吸収律によって a．また $(a \vee b) \wedge c$ は交換律によって $c \wedge (a \vee b)$ となり，ふたたび（$*$）で $x=c$, $y=a$, $z=b$ とおくことにより $(c \wedge a) \vee (c \wedge b)$，さらに交換律を用いて $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ となる．ゆえに，

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \vee c) \qquad [\text{結合律}] \\ &= a \vee (b \wedge c). \qquad [\text{吸収律}]\end{aligned}$$

すなわち，

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

これで，所要の結果が得られた．

定理 8． 一般の束において（すなわち，分配束とは限らずに），つぎの不等式が成立する：

1) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

2) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(one-sided distributive law)

証明 1) $a \geq a \wedge b$, $a \geq a \wedge c$

により，

$$a \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \qquad (1)$$

また，

$$b \vee c \geq b \geq a \wedge b, \qquad b \vee c \geq c \geq a \wedge c$$

によって，

$$b \vee c \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \qquad (2)$$

（1），（2）により，

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

これで，1）の証明ができた．

2）は 1）の双対である（証明終り）．

この定理8と，定理8のまえに述べたこととを総合すれば，つぎの定理が得られる：

定理 9．束において，つぎの 1)，2）の不等式の**いずれか**が成立することがわかれば，その束は分配束である：

1）$a \frown (b \smile c) \leq (a \frown b) \smile (a \frown c)$;

2）$a \smile (b \frown c) \geq (a \smile b) \frown (a \smile c)$.

例 9．任意の集合 M のベキ集合 2^M は，和集合 $\smile$ および共通部分 $\frown$ を束演算として，分配束をなす．

証明　M の任意の部分集合 A，B，C に対して

$$A \frown (B \smile C) \subseteq (A \frown B) \smile (A \frown C)$$

を証明する［定理 9 の 1)］．そのために，

$$x \in A \frown (B \smile C) \tag{1}$$

とおく．そうして

$$x \in (A \frown B) \smile (A \frown C)$$

を示せばよいのである．まず，（1）により

$$x \in A \tag{2}$$

および

$$x \in B \smile C \tag{3}$$

ということがわかる．（3）は

$$x \in B \qquad \text{または} \qquad x \in C$$

ということを意味している．

1°　$x \in B$ の場合には，（2）により

$$x \in A \frown B.$$

2°　$x \in C$ の場合には，（2）により

$$x \in A \frown C.$$

1°，2°のいずれの場合でも

$$x \in (A \frown B) \smile (A \frown C).$$

二つの分配律は互いに他の双対になっている．すなわち，分配束という概念は，束に関する自己双対的な性質である．したがって，分配束に

対しても〈双対の原理〉が成立する．

6． 順序集合のある部分集合 M において，M の元 a で M の上界になるものがあれば，その a は M の上限である．何となれば，この a は

1) a は M の上界である

2) b が M の上界ならば $a \leq b$

という〈M の上限〉の定義を満たしているからである．とくに 2) は，$a \in M$ ということに注意すれば，明らかであろう．このように，M の上界で M に属するものが，もし存在するならば，それを M の**最大元** (maximum) とよぶ．〈最大元〉の双対概念として**最小元** (minimum) を定義する．

順序集合 L を考察の対象としている場合，もし L 自身の最大元が存在する場合には，しばしば，その最大元を1という記号で表わす．また，L の最小元が存在すれば，それを0という記号で表わす．

順序集合 L に最大元1，最小元0が存在する，とは，L の任意の元 x に対して，つねに

$$0 \leq x \leq 1 \tag{1}$$

という式が成立するような 1，0 という L の元が存在する，ということである．

L が束である場合には，(1) という条件は

$$x \cup 1 = 1, \qquad x \cap 0 = 0 \tag{2}$$

と書くことができる．あるいは，

$$x \cap 1 = x, \qquad x \cup 0 = x \tag{3}$$

としてもよい．

例 10. 集合 M のベキ集合 2^M を，和集合 $\cup$ と共通部分 $\cap$ とを束演算として，束と考える場合（集合の包含関係 $\subseteq$ を順序とする順序集合と考える，といっても同じであるが），2^M の最大元は M で，最小元は空集合である．

例 11. {Y，人} を disjunction $\vee$，conjunction $\wedge$ を束演算とする束と考えれば，

$$A \vee \text{Y} = \text{Y}, \quad A \wedge \text{人} = \text{人}$$

ということから（§1参照），(2) によって，Y が最大元，人 が最小

元である．(3) によれば，このことは，

$$A \wedge \curlyvee = A, \quad A \vee \curlywedge = A$$

からもわかる．

例 12． 平面幾何で，

L＝{空集合，点（の全体），直線（の全体），全平面}

という集合族を，集合の包含関係 $\subseteq$ を順序とする束と考えた場合，L の最大元は全平面で，最小元は空集合．

例 13． $N=\{0, 1, 2, \cdots\}$

を，$a|b$（a は b の約数）という関係を順序とした束と考える場合（例 7 参照），L の最大元は 0 で，最小元が 1 となる．もし，この双対順序集合を考えれば，最大元がちょうど 1 となり，最小元が 0 となる．

例 14． $N=\{0, 1, 2, \cdots\}$

を，普通の数の大小関係を順序とした順序集合と考えれば，これは束となり（$a \cup b$ および $a \cap b$ は $\{a, b\}$ の最大元および最小元），N の最小元は 0 であるが，N の最大元は存在しない．

定義　最大元 1 および最小元 0 をもつ束 L において，L の元 x に対して

$$x \cup x^c = 1, \quad x \cap x^c = 0$$

となる L の元 x^c が存在すれば，x^c のことを x の**補元** (complement) とよぶ．

例 15． $\{\curlyvee, \curlywedge\}$ を $\vee$，$\wedge$ を束演算とする束と考えれば，命題 A の否定 $\neg A$ は A の補元である．すなわち，

排中律　$A \vee \neg A = \curlyvee$，　矛盾律　$A \wedge \neg A = \curlywedge$．

例 16． M のベキ集合 2^M を，集合の包含関係 $\subseteq$ を順序とする束と考えた場合，M の部分集合 A の M に関する補集合 (complementary set)

$$A^c = M - A$$

は A の補元となる：

$$A \cup A^c = M, \quad A \cap A^c = \phi.$$

ここで，ϕ は〈空集合〉を意味する．

例 17． 平面幾何で

L＝{空集合，点（全体），直線（全体），全平面}

を，集合の包含関係 $\subseteq$ を順序とする束と考える．そして，全平面を π，空集合を ϕ，任意の点を p，任意の直線を l と表わすことにしておく．π が L の最大元で，ϕ が最小元である．さて，p を通らない任意の直線を p^c と書けば

$$p \cup p^c = \pi, \quad p \cap p^c = \phi.$$

よって，p を通らない任意の直線はすべて p の補元である．また，l 上にない任意の点を l^c と書けば

$$l \cup l^c = \pi, \quad l \cap l^c = \phi$$

であるから，l 上にない任意の点はすべて l の補元である．さらに，l に平行な直線 l' をとっても

$$l \cup l' = \pi, \quad l \cap l' = \phi$$

となるから，l に平行な直線（ただし，l 自身は除く）も l の補元であることがわかる．

例 18．$N = \{0, 1, 2, \cdots\}$

を，$a|b$ という関係を順序とする束と考える．1と0の最小公倍数（すなわち $1 \cup 0$）は0で，最大公約数（$1 \cap 0$）は1であるから，

$$1 \cup 0 = 0, \quad 1 \cap 0 = 1$$

となり，0は1の補元，1は0の補元となる（0が最大元，1が最小元であることに注意！　例13 参照）．しかし，0でも1でもない自然数 x に対しては，x の補元は存在しない．何となれば，もし x の補元 x^c があったとすれば，

$$x \cup x^c = 0, \quad x \cap x^c = 1$$

でなければならないが，$x \cup x^c$（x と x^c の最小公倍数）が0である，ということと，$x \neq 0$ ということより，$x^c = 0$ でなければならない．そうすると，$x \cap x^c$（x と x^c の最大公約数）は x 自身となり，$x \neq 1$ という仮定に反する．

この例18よりわかるように，最大元および最小元の存在する束においても，補元というものは，必ずしも，つねに存在するとは限らない．

束 L の任意の元に対して，その補元が少なくとも一つ存在するとき（したがって，もちろん，L には最大元および最小元は存在する，として），その L を**可補束**または**相補束**あるいは単に**補束**（complemented lattice）という．

〈補元〉ならびに〈可補束〉という概念は，ともに自己双対的な概念

である．したがって，可補束についても〈双対の原理〉は成立する．

定理 10．最大元1および最小元0をもつ束においては（可補束とは限らずに），0は1の補元で，1は0の補元であり，しかも，1および0の補元はこれに限る．すなわち：

$$1^c=0, \quad 0^c=1.$$

証明 $0\leq 1$ ということから，

$$0\cup 1=1, \quad 0\cap 1=0.$$

これによって，0が1の補元，1が0の補元，ということがわかる．つぎに，1^c を1の任意の補元とすれば，

$$1\cap 1^c=0.$$

また，1が最大元であることから $1\geq 1^c$．ゆえに，

$$1\cap 1^c=1^c.$$

したがって，

$$1^c=0.$$

これとまったく双対的に，

$$0^c=1.$$

7. 分配束であり，しかも可補束であるような束のことを **Boole 束** (Boolean lattice) または **Boole 代数** (Boolean algebra) とよぶ．分配束および可補束という概念がともに自己双対的なものであったから，このように定義された〈Boole 代数〉というのもまた自己双対的な概念であって，Boole 代数においても〈双対の原理〉は成立する．

例 19．真な命題 ⋎ および偽な命題 ⅄ の集合 {⋎, ⅄} は，disjunction $\vee$，conjunction $\wedge$ を束演算として Boole 代数となっている．ここで，最大元は ⋎，最小元は ⅄，A の補元は A の否定 $\neg A$ である．

例 20．集合 M のベキ集合 2^M は，和集合 $\cup$，共通部分 $\cap$ を束演算として Boole 代数をなし，最大元は M，最小元は空集合，A の補元は M に関する A の補集合 $A^c=M-A$ である．

定理 11．Boole 代数においては，元 x の補元 x^c は，おのおのの x に対して，それぞれ一意的に定まる．

証明 x の任意の二つの補元を x'，x'' として，$x'=x''$ であること

を証明すればよい．そこで，

$$x \vee x' = 1, \quad x \wedge x' = 0$$

および

$$x \vee x'' = 1, \quad x \wedge x'' = 0$$

とする．まず，

$$\begin{aligned} x' &= x' \wedge 1 && [x' \leq 1] \\ &= x' \wedge (x \vee x'') && [x \vee x'' = 1] \\ &= (x' \wedge x) \vee (x' \wedge x'') && [\text{分配律}] \\ &= 0 \vee (x' \wedge x'') && [x' \wedge x = 0] \\ &= x' \wedge x'' && [0 \leq x' \wedge x''] \end{aligned}$$

すなわち，

$$x' = x' \wedge x''.$$

同様にして，

$$x'' = x' \wedge x''.$$

ゆえに，

$$x' = x''.$$

例 21． 平面幾何で

$$L = \{\text{空集合，点（全体），直線（全体），全平面}\}$$

を，集合の包含関係 $\subseteq$ を順序とする束と考えれば，これは分配束ではない．

証明　まず，L が可補束であることに注意する（定理 10 および例 17）．もし，L が分配束であれば，L は Boole 代数となり，定理 11 により，L の元の補元は一意的に定まらなければならない．しかし，直線 l の補元として，l 上にない任意の点を選ぶことができるから（例17），l の補元は一意的に定まらない．[1]　よって，L は分配束ではありえない．

定理 11 の系　Boole 代数においては　$x^{cc} = x$．

証明　Boole 代数では，x^c の補元 x^{cc} は一つしかない．しかも，x は x^c の補元である：

$$x^c \vee x = 1, \quad x^c \wedge x = 0.$$

ゆえに，

$$x^{cc} = x.$$

1）ここでは，ある直線と，その上にない 2 点の存在は仮定されている．

定理 12. Boole 代数においては，

$$(x\vee y)^c=x^c\wedge y^c,\qquad (x\wedge y)^c=x^c\vee y^c.$$

(De Morgan の法則)

証明 まず，

$$(x\vee y)\vee(x^c\wedge y^c)=(x\vee y\vee x^c)\wedge(x\vee y\vee y^c)\quad\text{［分配律］}$$
$$=1\wedge 1\qquad [x\vee x^c=y\vee y^c=1]$$

すなわち，

$$(x\vee y)\vee(x^c\wedge y^c)=1.\tag{1}$$

また，

$$(x\vee y)\wedge(x^c\wedge y^c)=(x\wedge x^c\wedge y^c)\vee(y\wedge x^c\wedge y^c)\quad\text{［分配律］}$$
$$=0\vee 0\qquad [x\wedge x^c=y\wedge y^c=0]$$

すなわち，

$$(x\vee y)\wedge(x^c\wedge y^c)=0.\tag{2}$$

(1)，(2) により，$x^c\wedge y^c$ は $x\vee y$ の補元である．定理 11 によって，$x\vee y$ の補元 $(x\vee y)^c$ は一意的に定まるから，

$$(x\vee y)^c=x^c\wedge y^c.$$

この双対を考えれば，

$$(x\wedge y)^c=x^c\vee y^c.$$

系 Boole 代数においては，

$$x\leq y\quad ならば\quad y^c\leq x^c.$$

証明 $x\leq y$ ならば $x\vee y=y$．De Morgan の法則により，

$$y^c=(x\vee y)^c=x^c\wedge y^c\leq x^c.$$

定理 13. Boole 代数において，部分集合 $\{a_\lambda\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ に上限が存在すれば，$\{a_\lambda{}^c\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ に下限が存在して，

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda{}^c.$$

また，$\{a_\lambda\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ に下限が存在すれば，

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda{}^c.$$

(De Morgan の一般法則)

証明 後半は前半の双対であるから，前半のみを証明する：

$\alpha=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ とおく．α は $\{a_\lambda\ ;\ \lambda\in\Lambda\}$ の上限であるから，

$$a_\lambda\leq\alpha\quad(\lambda\in\Lambda).$$

定理12の系により，

$$\alpha^c \leq a_\lambda{}^c \quad (\lambda \in \Lambda).$$

すなわち，α^c は $\{ a_\lambda{}^c ; \lambda \in \Lambda \}$ の下界である．

つぎに，x を $\{ a_\lambda{}^c ; \lambda \in \Lambda \}$の任意の下界とすれば，

$$x \leq a_\lambda{}^c \quad (\lambda \in \Lambda).$$

定理11，12の系により，

$$a_\lambda = a_\lambda{}^{cc} \leq x^c \quad (\lambda \in \Lambda).$$

よって，x^c は $\{ a_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ の上界である．ゆえに，α が $\{ a_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ の上限（＝最小上界）であることにより，

$$\alpha \leq x^c.$$

したがって，ふたたび定理11，12の系により，

$$x = x^{cc} \leq \alpha^c.$$

これと，α^c が $\{ a_\lambda{}^c ; \lambda \in \Lambda \}$ の下界であることとを合わせれば，α^c が $\{ a_\lambda{}^c ; \lambda \in \Lambda \}$ の下限であることがわかる：

$$\alpha^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda{}^c.$$

すなわち，

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda{}^c$$

8. この§を終わるに当たって，〈空集合の上界〉，〈空集合の下界〉ならびに〈空集合の上限〉，〈空集合の下限〉なるものについての注意を与えておくことは，無益のことではあるまいと思う．

一つの順序集合 L を考えることとし，L の部分集合 M, N に対しては，M **が空でない限り**，つぎの Ⅰ)，Ⅱ) が成立する：

Ⅰ) $M \subseteq N$ ならば，N の上界は M の上界である．

Ⅱ) $M \subseteq N$ ならば，N の下界は M の下界である．

ここで，Ⅰ) とⅡ) は互いに他の双対になっている．集合の包含関係$\subseteq$は，L における順序$\leq$とは関係はない．したがって，Lにおける〈双対〉を考えることとは，$\leq$と$\geq$とを入れ替えることであって，$\subseteq$を$\supseteq$で置きかえる，ということではない，ということには一応の注意をする必要がある．

さて，上の Ⅰ)，Ⅱ) は，〈上界〉，〈下界〉についての基本的な性質であって，M が**空集合である場合にも**成立することが望ましい．そこ

で，Ⅰ)，Ⅱ)において，M を空集合 ϕ とし，$N=\{a\}$ とおく．ここで，a は L の任意の元とする．しからば，$M\subseteq N$ となり，しかも a は N の上界でもあり，また下界でもある．このような場合にも，このⅠ)，Ⅱ)が成立するとすれば，L の任意の元 a は空集合 ϕ の上界にも，また下界にもなっていなければならない．これによって，つぎの定義を与える：

定義 順序集合 L において，空集合 ϕ を L の部分集合と考える場合には，L の**任意の元**は ϕ の**上界**である，ということにし，また，L の**任意の元**は ϕ の**下界**である，ともいうことにする．

この定義が，数学における論理的要求にも，また経験的要求にも十分にこたえうる，ということは，つまるところ，M が空集合である場合にも，つねにⅠ)，Ⅱ)が成立する，ということに帰着されるのである．

この定義を与えた以上，$\sup\phi$ および $\inf\phi$ の意味は必然的に定まってしまう．空集合 ϕ の**上限** $\sup\phi$ とは，ϕ の最小上界である．L のすべての元が ϕ の上界であるから，L に最小元 0 が存在するとき，および，そのときに限って，$\sup\phi$ は存在し，

$$\sup\phi=0 \tag{1}$$

となる．まったく双対的に，L に最大元 1 が存在するとき，および，そのときに限って，空集合 ϕ の**下限** $\inf\phi$ は存在し，

$$\inf\phi=1 \tag{2}$$

となる．

そのかわり，

$$\inf M\leq\sup M$$

という不等式には，一般的には，〈M が空でない限り〉という〈ただし書き〉をつける必要が生じる．そのことは，(1)と(2)を見てみれば明らかであろう．

(1)と(2)は，このほかにも，いろいろな形式に表現することができる．たとえば，

$$\bigcup_{\lambda\in\phi}a_\lambda=0,\qquad \bigcap_{\lambda\in\phi}a_\lambda=1.$$

この ϕ は，L の部分集合としての ϕ ではなく，a の index (添字) λ の集合としての空集合である．この場合にも，De Morgan の法則

$$(\bigcup_{\lambda\in\phi}a_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\phi}a_\lambda{}^c,\qquad (\bigcap_{\lambda\in\phi}a_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in\phi}a_\lambda{}^c$$

は成立している．

また，$M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ の上限 $\sup M$ および下限 $\inf M$ という意味での $\bigcup_{i=1}^{n} a_i$，$\bigcap_{i=1}^{n} a_i$ というものがあった（定理6）．ここで，$n=0$ というのが $M=\phi$ を意味すると考え，

$$\bigcup_{i=1}^{0} a_i=0, \quad \bigcap_{i=1}^{0} a_i=1.$$

これもまた，（1），（2）の別の表現となっている．

例 22. M のベキ集合において，任意個の部分集合 A_λ の和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ および共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ において，Λ が空のときは，

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\phi, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=M.$$

例 23. 空な disjunction，conjunction：

$$\bigvee_{i=1}^{0} A_i=\curlywedge, \quad \bigwedge_{i=1}^{0} A_i=\curlyvee.$$

練 習 問 題

1. 束において，もし $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$ または $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$ が存在すれば，それぞれ

$$a\cup\bigcup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a\cup b_\lambda),$$

$$a\cap\bigcap_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(a\cap b_\lambda).$$

2. 一般の束において，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ および $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$，あるいは $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ および $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$ が存在すれば，それぞれ

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda)\cup(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\cup b_\lambda),$$

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda)\cap(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda\cap b_\lambda).$$

注意 1および2は，いずれも〈結合律〉を一般化したものと考えられる．

3. 任意の集合 S の部分集合全体のつくる束 2^S においては，2^S の任意の部分集合 $\{A_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ に対して，つねにその上限 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ および下限 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する．そして，この $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ および $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ はそれぞれ A_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 全部の和集合および共通部分である．

4. Boole 束 2^S においては，つねに

$$A \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda),$$

$$A \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$$

が成立する（**弱完全分配律**）.

5. 一般の束においても，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ および $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \cap b_\lambda)$，あるいは $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ および $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (a \cup b_\lambda)$ の存在を仮定すれば，

$$a \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \geq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \cap b_\lambda),$$

$$a \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (a \cup b_\lambda)$$

という one-sided distributive law は成立する．

6. 一般の Boole 代数においても，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ または $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ が存在すれば，それに関する弱完全分配律

$$a \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \cap b_\lambda),$$

$$a \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (a \cup b_\lambda)$$

が成立する．

7. 2^S という Boole 代数では，つねに

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{\mu \in M} A_{\lambda, \mu} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda, \varphi(\lambda)},$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcap_{\mu \in M} A_{\lambda, \mu} = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda, \varphi(\lambda)}$$

が成立する（**強完全分配律**）．ここで，$\Phi = M^\Lambda$．すなわち，Φ は Λ から M への一意写像全体からなる集合であるとする．

§ 3. 真理関数の標準形

Boole 代数の解説によって，しばらく中断していた真理関数の研究を，ふたたび続けることにする．

〈真〉および〈偽〉という二つの命題 Y，人 をただ二つの元とする集合 {Y，人} を考え，関数値がすべて集合 {Y，人} の元となる関数のことを一般に**命題関数** (propositional function) というのであるが，個々の独立変数の変域もまたすべて集合 {Y，人} であるような命題関数のことを〈真理関数〉とよぶのであった．

この § では，任意の真理関数を disjunction $\vee$，conjunction $\wedge$ および否定 ㄱ の組み合せによって表現しうる，ということを示すのを最初の目標とする．これによって，真理関数の研究というものが，結局 $\vee$，$\wedge$，ㄱ という三つの真理関数の研究に帰着されるのである．そしてまた，このことは，命題論理の研究に Boole 代数というものが有用である，ということをも意味している．

1. いま，任意の真理関数

$$F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

が一つ与えられたとする．そして，これは n 変数の真理関数で，X_1, X_2, …, X_n がその n 個の独立変数であるとする．

X_1, X_2, …, X_n のおのおのに値 ε_1, ε_2, …, ε_n を与えると，F という関数は δ という一つの値をとる：

$$\delta = F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n).$$

ここで，おのおのの ε および δ は，それぞれ，Y または 人 という値のいずれかを表わしている．真理関数 F は，$\delta=$Y となるような ε の組 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ の全体を定めれば，それで確定する．これを，真理関数 F の**真理集合** (truth set) とよび，$[F]$ と表わす：

$$[F] = \{\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\ ;\ F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \text{Y}\ \}.$$

そうして，もう一つ n 変数の真理関数 G $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ が与えられたとすれば，F と G とが同一の真理関数となるための必要十分条件が，$[F]=[G]$ ということになる．いいかえれば，$F=G$ と $[F]=[G]$

とは，同じ内容のことを意味している．

F が恒等的に ⋎ という値をとるときは，真理集合 $[F]$ は，2^n 個の $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ というもの全体の集合である．この 2^n 個の元をもつ集合を I と表わすことにすれば，一般の F については，$[F]$ は I の部分集合になっている．とくに，F が恒等的に 人 という値をとる場合には，$[F]$ は空集合である．すなわち，

$$[\text{⋎}]=I, \qquad [\text{人}]=\phi$$

で，一般には

$$\phi \subseteq [F] \subseteq I$$

逆に，I の任意の部分集合 M を与えれば，必ず $M=[F]$ となる真理関数 F が存在する．それは，M の元には ⋎ を対応させ，それ以外の I の元には 人 を対応させる関数を F とすればよいからである．このことを，n 変数の真理関数の全体というものが，I のベキ集合 2^I によって完全に表現されている，といってよいであろう．しかも，それはBoole 代数として，いわゆる**同型** (isomorphic) な表現となっている．それをつぎに示そう．

n 変数の二つの真理関数 F, G が与えられたとき，これから

$$F(X_1, X_2, \cdots, X_n) \vee G(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

および

$$F(X_1, X_2, \cdots, X_n) \wedge G(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

として，n 変数 X_1, X_2, …, X_n の二つの真理関数が得られる．これらを簡単に書くときには，それぞれ $F \vee G$ および $F \wedge G$ と表わしてよいであろう．また，

$$\neg F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

という真理関数を $\neg F$ と表わす．そうすると，

$$[F \vee G]=[F] \cup [G],$$
$$[F \wedge G]=[F] \cap [G], \qquad [\neg F]=[F]^c.$$

ここで，$\cup$ は和集合，$\cap$ は共通部分で，M^c は I に関する M の補集合 $I-M$ を意味する．

証明 1) まず

$$[F \vee G]=[F] \cup [G]$$

を示す．

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F \vee G]$$

というのは，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \vee G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee$$

ということを意味する．そして，これは，$\vee$ の定義により，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee \quad \text{または} \quad G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee$$

ということであり，それは

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F] \ \text{または}\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [G],$$

すなわち，

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F] \cup [G]$$

ということである．ゆえに，

$$[F \vee G] = [F] \cup [G].$$

2) $$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F \wedge G]$$

というのは，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \wedge G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee$$

ということを意味する．そして，これは，$\wedge$ の定義により，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee$$

ということであり，それは

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F],\ [G],$$

すなわち，

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F] \cap [G],$$

ということである．ゆえに，

$$[F \wedge G] = [F] \cap [G].$$

3) $$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [\neg F]$$

というのは，

$$\neg F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlyvee$$

ということを意味する．そして，これは，$\neg$ の定義により，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \curlywedge$$

すなわち，

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \neq \curlyvee$$

ということであり，それは

$$(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n) \notin [F],$$

すなわち

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in [F]^c$$

ということである．ゆえに

$$[\neg F] = [F]^c.$$

この結果のうちの最初の二つを一般化すれば，

$$[\bigvee_{i=1}^{m} F_i] = \bigcup_{i=1}^{m} [F_i], \qquad [\bigwedge_{i=1}^{m} F_i] = \bigcap_{i=1}^{m} [F_i]$$

となる．証明は，m に関する数学的帰納法によればよい．

さて，ε を $\curlyvee$ または 人 を表わす記号とするとき，$\varepsilon(X)$ という記号をもって，$\varepsilon = \curlyvee$ のときには X 自身を，$\varepsilon =$ 人 のときには $\neg X$ を表わす，とする：

$$\varepsilon(X) = \begin{cases} X & (\varepsilon = \curlyvee) \\ \neg X & (\varepsilon = \text{人}). \end{cases}$$

このように定義された真理関数 $\varepsilon(X)$ の関数値が $\curlyvee$ となる必要十分条件は，独立変数 X の値が ε となることである．すなわち，$\varepsilon(X) = \curlyvee$ というのと $X = \varepsilon$ というのは同じことである．

証明　1)　$\varepsilon = \curlyvee$ の場合．$\varepsilon(X) = X$ であるから，上のことは当然である．

2)　$\varepsilon =$ 人 の場合．$\varepsilon(X) = \neg X$ であるから，$\varepsilon(X) = \curlyvee$ となる条件は $X =$ 人$(=\varepsilon)$ ということである（証明終り）．

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ を I の一つの元とするとき，

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i(X_i)$$

という式のことを，X_1，X_2，…，X_n に関する **elementary conjunction** という．おのおのの elementary conjunction は，それぞれ一つの真理関数を表わしている．それでは，真理関数 $\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon_i(X_i)$ の真理集合は何か，というと，それは，$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ だけを一つの元とする集合である：

$$[\bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_j(X_j)] = \{ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \}.$$

証明 $\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_j(X_j)=\mathrm{V}$ となるのは

$$\varepsilon_1(X_1)=\varepsilon_2(X_2)=\cdots=\varepsilon_n(X_n)=\mathrm{V}$$

のとき，および，そのときのみである．すなわち，それは，

$$X_1=\varepsilon_1,\ X_2=\varepsilon_2,\ \cdots,\ X_n=\varepsilon_n$$

のときである（証明終り）．

n 変数の任意の真理関数を F とする．しからば，F の真理集合 $[F]$ は I の部分集合で，（〈空集合〉を含めた意味での）有限集合である．よって，$[F]$ の元の個数を m とし $(0\leqq m\leqq 2^n)$，$[F]$ の元に番号をつけて

$$[F]=\{\ (\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in})\ ;\ 1\leqq i\leqq m\ \}$$

とする．そうすると，

$$[F]=\bigcup_{i=1}^{m}\{\ (\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in})\ \}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{m}[\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j)]$$

$$=[\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j)].$$

したがって，

$$F=\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j)$$

となる．この式の右辺は，もちろん

$$\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j))$$

の意味であり，これを，真理関数 F の **principal disjunctive normal form** とよぶ．F が恒等的に人の真理関数であるときには，$m=0$ である（§2の最後の 例22 参照）．

Principal disjunctive nomal form というものは，変数 X_1，X_2，…，X_n 以外には，disjunction $\vee$，conjunction $\wedge$ および否定 $\neg$ だけしか含まないから，任意の真理関数が $\vee$，$\wedge$，$\neg$ のみの組み合せで表わされる，ということをも同時に証明しえたわけである．

例 1．X，Y，Z を独立変数とする真理関数

$$(X\wedge Y)\sim Z$$

の principal disjunctive normal form を求めよ．ただし，$A \sim B$ というのは $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ で定義される真理関数で，$A=B$ のとき，および，そのときに限って Y となるものである（§1参照）．

解 $X=X_1$，$Y=X_2$，$Z=X_3$ として，

$$(X \wedge Y) \sim Z = \mathrm{Y}$$

となる (X, Y, Z) をすべて求めると，

$$(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}) = (\mathrm{Y}, \mathrm{Y}, \mathrm{Y}),$$
$$(\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}) = (\mathrm{Y}, \text{人}, \text{人}),$$
$$(\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}) = (\text{人}, \mathrm{Y}, \text{人}),$$
$$(\varepsilon_{41}, \varepsilon_{42}, \varepsilon_{43}) = (\text{人}, \text{人}, \text{人}).$$

よって，

$$\bigwedge_{j=1}^{3} \varepsilon_{1j}(X_j) = X \wedge Y \wedge Z,$$

$$\bigwedge_{j=1}^{3} \varepsilon_{2j}(X_j) = X \wedge \neg Y \wedge \neg Z,$$

$$\bigwedge_{j=1}^{3} \varepsilon_{3j}(X_j) = \neg X \wedge Y \wedge \neg Z,$$

$$\bigwedge_{j=1}^{3} \varepsilon_{4j}(X_j) = \neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z.$$

ゆえに，求める principal disjunctive normal form は

$$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

例 2. $\neg(X \vee Y)$ の principal disjunctive normal form を求めよ．

解 $\neg(X \vee Y) = \mathrm{Y}$ となるのは

$$(X, Y) = (\text{人}, \text{人})$$

のときのみである．よって，求める normal form は

$$\neg X \wedge \neg Y.$$

問 1. $\neg(X \wedge Y)$ の principal disjunctive normal form を求めよ．

2. Principal disjunctive normal form の双対概念のことを **principal conjunctive normal form** とよぶ．しかし，与えられた真理関数 F の principal conjunctive normal form を求めるには，$\neg F$ の principal disjunctive normal form を求めて，それに De Morgan の法則を適用すれば簡単に得られる：

$\neg F$ の principal disjunctive normal form を求めて,

$$\neg F=\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j).$$

二重否定の法則と De Morgan の法則を用いて,

$$F=\neg\neg F=\neg(\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j))$$

$$=\bigwedge_{i=1}^{m}\neg(\bigwedge_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(X_j))$$

$$=\bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{n}\neg\varepsilon_{ij}(X_j).$$

ここで, $\varepsilon^*{}_{ij}(X_j)$ というものを

$$\varepsilon^*{}_{ij}(X_j)=\begin{cases}\neg X_j & (\varepsilon_{ij}=\curlyvee)\\ X_j & (\varepsilon_{ij}=\curlywedge)\end{cases}$$

と定義すれば, もちろん

$$\varepsilon^*{}_{ij}(X_j)=\neg\varepsilon_{ij}(X_j)$$

となり,

$$F=\bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{n}\varepsilon^*{}_{ij}(X_j)$$

となる. この右辺が, F の principal conjunctive normal form である.

例 3. $(X\wedge Y)\sim Z$ の principal conjunctive normal form を求めよ.

解 $\neg((X\wedge Y)\sim Z)=\curlyvee$, すなわち

$$(X\wedge Y)\sim Z=\curlywedge$$

となる (X, Y, Z) をすべて求めれば,

$$(\curlyvee, \curlyvee, \curlywedge), (\curlyvee, \curlywedge, \curlyvee), (\curlywedge, \curlyvee, \curlyvee), (\curlywedge, \curlywedge, \curlyvee)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}&\neg((X\wedge Y)\sim Z)\\&=(X\wedge Y\wedge\neg Z)\vee(X\wedge\neg Y\wedge Z)\\&\qquad\vee(\neg X\wedge Y\wedge Z)\vee(\neg X\wedge\neg Y\wedge Z).\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}&(X\wedge Y)\sim Z\\&=(\neg X\vee\neg Y\vee Z)\wedge(\neg X\vee Y\vee\neg Z)\\&\qquad\wedge(X\vee\neg Y\vee\neg Z)\wedge(X\vee Y\vee\neg Z).\end{aligned}$$

問 2. $\neg(X\vee Y)$ および $\neg(X\wedge Y)$ の principal conjunctive normal form を求めよ.

真理関数 $F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の principal disjunctive normal form というものは,

1) 命題変数 X_1, X_2, …, X_n からできる相異なる elementary conjunction C_i の disjunction $\bigvee_{i=1}^{m} C_i$ $(0 \leqq m \leqq 2^n)$ であって,

$$F = \bigvee_{i=1}^{m} C_i$$

となるものである. そして,

2) おのおのの elementary conjunction C_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ は, 命題変数 X_1, X_2, …, X_n をちょうど1回ずつ含み, しかも, X_j 自身かまたはそれに一つだけの否定記号 $\neg$ をつけた $\neg X_j$ というものからできる conjunction

$$C_i = \bigwedge_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(X_j)$$

なのである.

すると, おのおのの C_i はすべて n 変数の真理関数となり, F の真理集合 $[F]$ は

$$[F] = \bigcup_{i=1}^{m} [C_i]$$

と表わされる. しかも, C_i の真理集合 $[C_i]$ は, まえに述べたように, ただ一つの元 $(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \cdots, \varepsilon_{in})$ のみをもつ集合であった. したがって, このことから, F の principal disjunctive normal form というものは, C_i の順序や, C_i における X_j の順序を問題外とすれば, F に対して, 一意的に確定する, ということがわかる.

Principal conjunctive normal form についても, 同じ意味での一意性が成り立つ. そのことは, principal conjunctive normal form というのが principal disjunctive normal form の双対概念であることに注意すれば, 明らかである.

実際, 真理関数の定義において, Y と 人 とを入れかえれば, $\vee$ の定義は $\wedge$ の定義となり, $\neg$ の定義はそのままである. この意味で, 命題論理においても**双対の原理**は成立する.

例 4. $\neg(X \vee Y)$ を, 命題変数 X, Y, Z の真理関数と考えて, その principal disjunctive normal form を求めよ (例2参照).

解 $\neg(X \vee Y)=\mathrm{Y}$ となる (X, Y, Z) をすべて求めると，

$$(\text{人}, \text{人}, \mathrm{Y}), (\text{人}, \text{人}, \text{人}).$$

よって，求める normal form は

$$(\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

上の例からもわかるように，principal disjunctive normal form にしても，principal conjunctive normal form にしても，与えられた真理関数を，何変数の関数と考えるか，ということをはっきり定めておかなければ，意味は確定しないのである．

3. 上に述べたことから，任意の真理関数はすべて，$\vee$, $\wedge$, $\neg$ という三つの特別な真理関数の合成関数として表わされる，ということがわかった．であるから，これからは，真理関数が与えられた，というときには，命題変数と $\vee$, $\wedge$, $\neg$ という三つの記号で表わされた式が与えられているものと理解することにしよう．ただし，そのとき，その与えられた式というのは，principal disjunctive normal form にも principal conjunctive normal form にもなっていないのが普通のことである．

さて，このような意味において真理関数が与えられた場合には，比較的簡単な，しかも，代数的な方法で，その**標準形** (normal form) を求めることができる．以下，その方法を説明する．

この方法の基礎になるのは，〈De Morgan の法則〉

$$\neg(\bigvee_{i=1}^{n} A_i)=\bigwedge_{i=1}^{n}\neg A_i, \qquad \neg(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i)=\bigvee_{i=1}^{n}\neg A_i$$

と，〈分配律〉

$$A \wedge (\bigvee_{i=1}^{n} B_i)=\bigvee_{i=1}^{n}(A \wedge B_i),$$

$$A \vee (\bigwedge_{i=1}^{n} B_i)=\bigwedge_{i=1}^{n}(A \vee B_i)$$

ならびに，〈二重否定の法則〉

$$\neg\neg A=A$$

である．ここで，De Morgan の法則および分配律は，もっとも簡単な形，すなわち，$n=2$ の場合のみを繰り返し用いればよいのであるが，実際的な考慮から，少し一般的な形に述べておいた．事実，$n=2$ の場合（§1参照）さえ知っていれば，あとは，n に関する数学的帰納法で，

一般の場合を証明することは容易である．

その他，〈交換律〉

$$A\vee B=B\vee A,\qquad A\wedge B=B\wedge A$$

も用いるが，それは，分配律における A と $\bigvee_{i=1}^{n}B_i$ あるいは $\bigwedge_{i=1}^{n}B_i$ を入れかえた形の分配律を用いるときにのみ必要なのである．

3.1. まず，De Morgan の法則と二重否定の法則を用いて，否定記号は命題変数にのみ，しかも，おのおのの命題変数に対しては，おのおのの場所において，高々 1 回だけ作用するように，式を変形することができる．

例 5. $\neg(A\wedge\neg(A\wedge\neg B))$ という式に対しては：

$$\begin{aligned}
&\neg(A\wedge\neg(A\wedge\neg B))\\
&=\neg(A\wedge(\neg A\vee\neg\neg B)) && \text{[De Morgan の法則]}\\
&=\neg(A\wedge(\neg A\vee B)) && \text{[二重否定の法則]}\\
&=\neg A\vee\neg(\neg A\vee B) && \text{[De Morgan の法則]}\\
&=\neg A\vee(\neg\neg A\wedge\neg B) && [\qquad〃\qquad]\\
&=\neg A\vee(A\wedge\neg B). && \text{[二重否定の法則]}
\end{aligned}$$

3.2. さて，3.1 の結果として，¬ が命題変数のまえにだけ高々 1 回ついているような式だけを考えればよい．そこで今度は，分配律のうち第一のもの

$$A\wedge(\bigvee_{i=1}^{n}B_i)=\bigvee_{i=1}^{n}(A\wedge B_i)$$

を考える．式を見やすくするために，$X\vee Y$ のことを $X+Y$，$X\wedge Y$ のことを XY と書く（このときには，disjunction に対する〈論理和〉，conjunction に対する〈論理積〉という名称は適当である）．この記法に従えば，上の分配律の第一式は，

$$A(B_1+B_2+\cdots+B_n)=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$$

という，普通の分配律の形になる．

いま，真理関数を表わす式で，¬ が命題変数のまえに高々 1 回だけついているものが与えられた，とすれば，上の分配律を繰り返し用い，普通の通り計算をして，括弧を全部はずしてしまうことができ，その結果は

$$\sum_{i=1}^{m}C_i$$

という形をしている．ここで，おのおのの C_i は，命題変数または否定記号 ¬ のついた命題変数のいくつかの積で，積をふたたび conjunction ∧ に書き直せば，いわゆる elementary conjunction になっている.[1] また，上に得た式における和 $\sum$ を，もとの disjunction ∨ にもどせば，

$$\bigvee_{i=1}^{m} C_i$$

という標準形が得られたわけである．すなわち，与えられた式を，いくつかの elementary conjunction の disjunction に変形したのである．この形の標準形のことを **disjunctive normal form** という．

上の方法で得られる disjunctive normal form は，必ずしも principal disjunctive normal form ではない．

例 6． $(X \wedge Y) \sim Z$ の disjunctive normal form を求めよ．

（例 1 参照）

解 $(X \wedge Y) \sim Z$

$$= ((X \wedge Y) \wedge Z) \vee (\neg(X \wedge Y) \wedge \neg Z)$$

［～ の定義．§1 参照］

$$= (X \wedge Y \wedge Z) \vee ((\neg X \vee \neg Y) \wedge \neg Z)$$
$$= (X \wedge Y \wedge Z) \vee ((\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z))$$
$$= (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z)$$

3.3. Disjunctive normal form の双対概念を **conjunctive normal form** という．与えられた式の conjunctive normal form を求めるには，3.1 の方法の後に，3.2 と双対的な方法をほどこせばよい．そこでは，分配律の第 2 式を用いることになる．

このときは，∧ を〈和〉，∨ を〈積〉と考えることになるのかもしれないが，そのようなことは，あまり推奨できない．それよりも，むしろ ∨ と ∧ のままで，どんどん分配律を自由自在に用いるようになれるこ

1）これは，**1** において定義した elementary conjunction とは一般的に異なる．**1** において定義された elementary conjunction はつぎの二つの特性をもっている．

1° **すべての**命題変数を含んでいる．

2° 同一の命題変数は**ただ一度**しか現われない．

ここでいう elementary conjunction は，このような性質を必ずしももってはいない．以後，elementary conjunction という語を，このように拡張された意味に用いる．

とが望ましいのである．

例 7. $(X\wedge Y)\sim Z$ の conjunctive normal form を求めよ．

（例 3 参照）

解　$(X\wedge Y)\sim Z$

$$
\begin{aligned}
&=(X\wedge Y\wedge Z)\vee[\neg(X\wedge Y)\wedge\neg Z] \text{ [1]}\\
&=(X\wedge Y\wedge Z)\vee[(\neg X\vee\neg Y)\wedge\neg Z]\\
&=[(X\wedge Y\wedge Z)\vee(\neg X\vee\neg Y)]\wedge[(X\wedge Y\wedge Z)\vee\neg Z]\\
&=[(X\vee(\neg X\vee\neg Y))\wedge(Y\vee(\neg X\vee\neg Y))\\
&\qquad\qquad\wedge(Z\vee(\neg X\vee\neg Y))]\\
&\qquad\wedge[(X\vee\neg Z)\wedge(Y\vee\neg Z)\wedge(Z\vee\neg Z)]\\
&=(X\vee\neg X\vee\neg Y)\wedge(Y\vee\neg X\vee\neg Y)\\
&\qquad\wedge(Z\vee\neg X\vee\neg Y)\wedge(X\vee\neg Z)\\
&\qquad\qquad\wedge(Y\vee\neg Z)\wedge(Z\vee\neg Z)
\end{aligned}
$$

上に述べた方法では，ここで終わる．しかし，実際には，もう少し簡単な形に変形することができる：

$$
\begin{aligned}
&X\vee\neg X\vee\neg Y=\curlyvee\vee\neg Y=\curlyvee\\
&Y\vee\neg X\vee\neg Y=Y\vee\neg Y\vee\neg X=\curlyvee\vee\neg X=\curlyvee\\
&Z\vee\neg Z=\curlyvee
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&(X\wedge Y)\sim Z\\
&=\curlyvee\wedge\curlyvee\wedge(Z\vee\neg X\vee\neg Y)\wedge(X\vee\neg Z)\wedge(Y\vee\neg Z)\wedge\curlyvee
\end{aligned}
$$

となり，$\curlyvee$ が $\{\curlyvee, \curlywedge\}$ という Boole 代数における最大元であることに注意すれば，

$$
\begin{aligned}
&(X\wedge Y)\sim Z\\
&\qquad=(Z\vee\neg X\vee\neg Y)\wedge(X\vee\neg Z)\wedge(Y\vee\neg Z).
\end{aligned}
$$

まず，これがいちばん簡単な conjunctive normal form であろう．

3.4.　Principal disjunctive（または conjunctive）normal form というのは，disjunctive（または conjunctive）normal form のなかでいちばん簡単なものというわけでもなく（例 1，例 6 参照），かといって，上に述べた方法で，つねにいちばん簡単な標準形が得られるというわけでも

1）もはや〈真理集合〉なるものを使うことはないから，この［　］は，普通の意味での括弧である．もし，〈真理集合〉の意味で，この種の括弧を使うことがあれば，それは，その都度ことわって用うべきである．

ない（例3，例7 参照）．また，principal な標準形は，標準形のうちで，独自の特性をもっていることは事実であるが，標準形のなかで特に重要なもの，というのでもない．が，話のついでであるから，上の方法を続けて，principal な標準形に到達する方法をも説明しておこう：

まず，disjunctive normal form

$$\bigvee_{i=1}^{m} C_i$$

が与えられたとしよう．ここで，おのおのの C はすべて elementary conjunction であるとし，しかも，これは必ずしも principal な標準形ではない，とする．

3.41. 一つの C の中に同じ命題変数（たとえば，それを X とする）が2回以上現われる場合．

3.411. C の中に否定 $\neg$ のつかない X が2回以上現われる場合．そのうちの一つを残して，あとを全部消す（ベキ等律）．

3.412. C の中に $\neg X$ が2回以上現われる場合．そのうちの一つを残して，あとは全部消す．

3.413. C の中に X と $\neg X$ とが同時に現われる場合．C 自身を消してしまう．何となれば

$$X \wedge \neg X = 人$$

で，C 自身も 人 となるからである．

3.42. C の中に現われない命題変数(たとえば，それを X とする）がある場合．C の代わりに，二つの elementary conjunction

$$C \wedge X, \quad C \wedge \neg X$$

を入れる．何となれば，

$$\begin{aligned}(C \wedge X) \vee (C \wedge \neg X) &= C \wedge (X \vee \neg X) \\ &= C \wedge Y \\ &= C\end{aligned}$$

となるからである．

この 3.41，3.42 の操作を繰り返し適用すれば，ついには，あらゆる elementary conjunction が，必要な命題変数を全部，しかも1回ずつだけ含むようになる．こうして得られた標準形を

$$\bigvee_{i=1}^{n} C_i^*$$

とする．C^* のなかに，同じ elementary conjunction があれば，余分のものを取り去る．こうして，principal disjunctive normal form が得られるのである．

Principal conjunctive normal form を得るには，上と双対的な操作を行なえばよろしい．

3.5. この3における議論は，Boole 代数における演算としての $\vee$，$\wedge$，$\neg$ の性質と，その Boole 代数における最大元，最小元が Y，人 である，という性質のみを基礎にしている，ということは十分注目に値することである．

練 習 問 題

1. $\neg(A\vee\neg\{B\vee\neg[C\vee\neg(B\vee A)]\})$
の disjunctive normal form および conjunctive normal form を求めよ．また，これを A，B，C の真理関数と考えての principal disjunctive (および conjunctive) normal form を求めよ．

2. $A\vee B$ の principal disjunctive normal form を求めよ．また，これの principal conjunctive normal form は何か．

3. 最小元0をもつ束において

$$0 < x < a$$

という元 x が存在しないような元 a で0と異なるものを**原子元** (atom) とよぶ．

命題変数 X_1，X_2，…，X_n を独立変数とする真理関数の全体がつくる Boole 束における原子元は何か．

4. 最小元0をもつ分配束において，a を原子元とするとき，

$$a \leq x \cup y$$

となる必要十分条件は

$$a \leq x \quad \text{または} \quad a \leq y$$

の少なくとも一方が成立することである．

5. 最小元0をもつ分配束 L の原子元の全体を A とおき，L の任意の元 x に対して

$$[x]=\{\,a\ ;\ a\leq x,\ a\in A\,\}$$

という A の部分集合 $[x]$ を対応させれば，

$$[x \cup y]=[x] \cup [y], \qquad [x \cap y]=[x] \cap [y].$$

6. 前問の L が最大元 1 をもち，Boole 代数をなしていれば，

$$[0]=\phi, \quad [1]=A, \quad [x^c]=[x]^c.$$

ここで，$[x]^c$ は A に関する $[x]$ の補集合である．

7. 5 の意味に $[x]$ という記号を用いるとき，原子元 a に対しては

$$[a]=\{a\}$$

である，ということを利用し，原子元全体の集合 A の任意の有限部分集合が L の適当な元 x を用いて $[x]$ と表わされることを示せ．

8. 元の個数が有限な Boole 代数を**有限 Boole 代数**という．

有限 Boole 代数のすべての元は，それぞれ適当な原子元 a_1, a_2, …, a_ν を用いて

$$a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_\nu \qquad (\nu \geqq 0)$$

という形に表わすことができる．

9. 有限 Boole 代数においては，

1) $[x] \subseteq [y]$ ならば $x \leqq y$.

2) $[x]=[y]$ ならば $x=y$.

ここで，$[x]$, $[y]$ は 5 で定義された記号とする．

10. 有限 Boole 代数についての，つぎの 1)—4) という性質を確認せよ．

1) 任意の有限 Boole 代数は，適当な集合 A を選ぶことにより，A のベキ集合 2^A から集合の包含関係 $\subseteq$ を順序としてつくられる Boole 代数と同型になる．

2) 有限 Boole 代数の元の個数は，2^n という形の数である ($n=0, 1, 2, \cdots$)．

3) 元の個数の等しい有限 Boole 代数はすべて同型である．

4) 有限 Boole 代数の元を，原子元 a_1, a_2, …, a_ν を用いて 8 におけるように表現した場合，a_1, a_2, …, a_ν を互いに異なるものとしておけば，a_1, a_2, …, a_ν の順序を除いて，その表現は一意的である．

§4.　Tautology

まえの§のなかほどから，真理関数を表わす〈式〉というものが話の主題となってきた．真理関数を表わす〈式〉と，〈真理関数〉そのものとは異なった概念であろう．あたかも，多項式自身と，その多項式の表わす関数とが異なった概念であるがごときである．真理関数を表わす式を〈論理式〉とよぶ．

この§では，まず〈論理式〉の定義を与える．さらに，そのまえに，まえの§で混乱を起こしかけていた記号の使用法も整理しておく．

1.　〈論理式〉というのは，純粋に syntactical な概念である．すなわち，内容には関係のない，純粋に形式的な概念である．ただ，論理式の表わす真理関数を問題とするとき，初めて semantic な解釈が必要となるのである．

Syntax の立場においては，〈命題変数〉とは単なる記号である．それは，多項式における変数というものが単なる記号にすぎないのと，まったく同様である．命題変数が何かある命題を代表していると考える場合(semantics の立場）と，命題変数はあくまでも命題変数とよばれる記号自身であると考える場合（syntax の立場），という二つの場合があることは，はっきり意識しておかなければならない．Syntax においては，真理関数そのものを議論の対象にすることはできない．しいて真理関数なるものを syntax において研究しようと思えば，それは論理式を通してのみ考えられるのである．

Syntax においては，命題変数は単なる記号であるから，論理式を表わすのに命題変数を用いるのは至当でない．そこで，論理式を表わす記号と命題変数とを区別するために，これからは，論理式を表わすのに

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \cdots$$

などのドイツ大文字を用いる．

いままでの研究（§1，§3）においては，二つの命題 Y（真）および人（偽）を元とする集合 {Y，人} を問題にしていた．その上で，この

集合で定義される真理関数というものを研究の対象としていた．§3 の結果によれば，そのためには，$\vee$，$\wedge$，$\neg$ という三つの特定の真理関数を調べれば十分である，ということもわかった．

そこでの〈命題変数〉というものは，集合 {⋎，⋏} の元を代表する変数であった．研究の対象に命題が現われる，という意味で，その研究の立場を〈超論理〉とよぶならば，命題変数は〈超論理的変数〉であったのである．また，$\vee$，$\wedge$，$\neg$ なども，ある真理関数を指示する〈超論理的記号〉であった．少なくとも，そのように考えることができるのである．

ところが今度は，それよりも一段高い立場に立って研究を進めようと思う．そして，この新しい立場を〈超論理〉とよぶことにするのである．たとえば，論理式を表わす記号 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$ などは，この新しい〈超論理〉における変数であって，超論理の研究の対象となっている〈論理〉には現われない記号である．そして，〈命題変数〉とか $\vee$，$\wedge$，$\neg$ などの記号は，すべて論理における記号であって，超論理においては，それに何の内容をも付与せず，それを記号そのものとして研究の対象とするのである．その意味では，命題変数も，$\vee$，$\wedge$，$\neg$ という記号も，ともに ⋎ や ⋏ という記号と同列のものとなる．少なくとも，新しい超論理の立場では，命題変数の〈変数〉という名称は名ばかりで，変数でも何でもない．とにかく，命題変数は，⋎ とか ⋏ を代表するものではないのである．

2. ここで，命題論理における**論理式** (formula) なるものの**定義**を与える：

論理式の定義

1) ⋎ および ⋏ は論理式である．
2) 個々の命題変数は，それぞれ一つの論理式である．
3) $\mathfrak{A}$ が論理式ならば，$\neg\mathfrak{A}$ は論理式である．
4) $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ が論理式ならば，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ および $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ は論理式である．
5) 以上の 1)—4) によって論理式であることがわかるものだけが論理式である．

例 1. $[A\vee\neg(B\wedge\curlyvee)]\wedge\neg A$ が論理式であることを，上の定義にしたがって説明すれば，つぎのとおり：

1. A および B は，ともに 2) によって論理式.
2. $\curlyvee$ は 1) によって論理式.
3. $B\wedge\curlyvee$ は，1と2から，4) によって論理式.
4. $\neg(B\wedge\curlyvee)$ は，3から，3) によって論理式.
5. $A\vee\neg(B\wedge\curlyvee)$ は，1と4から，4) によって論理式.
6. $\neg A$ は，1から，3) によって論理式.
7. $[A\vee\neg(B\wedge\curlyvee)]\wedge\neg A$ は，5と6から，4) によって論理式.

以上.

例1で示したように，論理式がどのような順序で定義されてきたか，という結合の順序を示すには，普通のとおりに括弧を用いる.

また，上に述べた論理式の定義は，論理式を作る方法を列挙して，そのような方法によってできるもののみが論理式である，という形で述べられている．このような形に述べられる定義のことを一般に**帰納的な定義** (inductive definition, recursive definition) とよぶ．帰納的定義というものは，今後もしばしば用いられるであろう．つぎのものも帰納的定義の一種である．というよりは，むしろ典型的，あるいは，もっとも原始的なもの，というべきかもしれない.

例 2. $\bigvee_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i$ の定義 $(n=1,2,3,\cdots)$：

1) $\bigvee_{i=1}^{1}\mathfrak{A}_i=\mathfrak{A}_1$;

2) $\bigvee_{i=1}^{n+1}\mathfrak{A}_i=(\bigvee_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i)\vee\mathfrak{A}_{n+1}$.

$\bigwedge_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i$ の定義も同様（双対的）である.

この例2によって定義された記号 $\bigvee_{i=1}^{n}$ とか $\bigwedge_{i=1}^{n}$ とかは，もちろん超論理的な記号であり，n は（自然数を表わす）超論理的変数である．さらには

$$\bigvee_{i=1}^{0}\mathfrak{A}_i=\curlywedge,\qquad \bigwedge_{i=1}^{0}\mathfrak{A}_i=\curlyvee$$

という定義をつけ加えておけば，なお都合がよい.

$\bigvee_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ とか $\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ という形の論理式をしばしば

$$\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \cdots \vee \mathfrak{A}_n$$

とか

$$\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_n$$

のように書き表わすが，ほんとうは，

$$(((\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2) \vee \mathfrak{A}_3) \vee \cdots) \vee \mathfrak{A}_n$$

というように，括弧がまえの方から順についているのである．

例 3． Syntax においては，結合律

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

は成立しない．

Semantics においては，上の結合律は

左辺の論理式によって表わされる真理関数と，右辺の論理式によって表わされる真理関数とが同じものである

という意味で成立していた．ところが，syntax においては，真理関数というものを仲介にした〈＝〉というものを考えるのは不純である．Syntax において，もっとも自然に＝の意味を考えれば，それは，左辺の論理式と右辺の論理式とが論理式として（syntactical に）同じものである，と理解すべきであろう．その意味では，結合律が成立しないのは当然である．

例2の $\bigvee_{i=1}^{n}$ の定義における＝も，もちろん syntactical な意味において用いたのである．

3． ここで，中間的に，ふたたび semantic な考察に移る．

定義 関数値が恒等的に V となる真理関数を表わす論理式のことを **tautology**（同語反復）という．

ここで〈論理式〉というのは syntactical な概念であるが，syntactical なものを semantics で使っていけない，ということはない．Semantics というのは，いわば常識的な立場であるから，まちがったことでない限り，何をやってもよいのである．ところが，syntax のほうは，あとで少し都合があるので〈身ぎれい〉にしておかないといけない．そのために semantic なものを，不純だとして嫌うのである．

さて，命題論理における tautology の重要性は何か．それを以下に説明する．

われわれはすでに，真理関数というものがすべて適当な論理式によって表現されうることを知った（§3）．である以上，真理関数の研究たる命題論理においては，任意に与えられた論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が同一の真理関数を表わすかどうか，すなわち，semantic な意味において

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B} \qquad (1)$$

という等式が成立するかどうか，ということだけが問題である．ところが（1）式は，やはり semantic な意味において

$$\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}=\curlyvee \qquad (2)$$

ということと同じである．ここで，$\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ というのは，詳しく書けば $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B})$ とすべき論理式を表わす超論理的略記号である．（1）と（2）とが同じことだという説明は §1 に述べた．したがって，（1）という問題は $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ という論理式が tautology であるかどうか，という問題にほかならない．

要するに，命題論理における問題は，tautology に関する問題に集約されるのである．

4. 最後に，いままで述べた命題論理を syntactical に整理をしておこう．整理をしてしまうと，実に簡単な，つまらぬものになってしまうけれども，命題論理とは，ただ単にこれだけのものである，という認識が，数理論理学においては重要な意味をもつ．

4.1. **記号**

4.11. $\curlyvee$，$\curlywedge$．

4.12. **命題変数**：A, B, C, ….

4.13. **論理記号** (logical symbol)：$\neg$，$\vee$，$\wedge$．

まえにも述べたとおり，これは〈関数〉を意味するのではなく，単なる記号である．これら，命題論理における論理記号を**命題結合記号** (propositional connectives) と総称することもある．

4.14. **補助記号**：(,).

これは括弧である．実際には，［ ］とか｛ ｝という括弧も用いるであろうが，原理的には（ ）という1種類だけで十分である．

4.2. **論理式** 4.1 にあげた記号のみで構成することができる．定義はまえに述べた（**2** 参照）．

4.3. **付値**（valuation） 有限個の命題変数のおのおのに Y または 人 を一つずつ対応させる個々の対応のことをいう．

一つの付値が与えられたとき，その付値に対する論理式の**値**（value）というものを，つぎのように（論理式の定義にしたがって，帰納的に）定義する．ただし，値の定義される論理式とは，その論理式に含まれる命題変数がすべて，付値の定義された命題変数である，というものに限られる．

4.31. Y の値は Y，人 の値は 人．

4.32. 命題変数の値は，その付値によって，その命題変数に対応している Y または 人 とする．

4.33. $\mathfrak{A}$ の値が Y ならば，$\neg\mathfrak{A}$ の値は 人．$\mathfrak{A}$ の値が 人 ならば，$\neg\mathfrak{A}$ の値は Y．

4.34. $\mathfrak{A}$ の値も $\mathfrak{B}$ の値も 人 のとき，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ の値は 人；それ以外の場合は，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ の値は Y．$\mathfrak{A}$ の値も $\mathfrak{B}$ の値も Y のとき，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の値は Y；それ以外の場合は，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の値は 人．

このように定義された論理式の〈値〉のことを**真理値**（truth value）とよぶ．

4.4. **Tautology** ある論理式が与えられたとし，その論理式に含まれるすべての命題変数に対して定義されたいかなる付値に対しても，その論理式の真理値がつねに Y となるとき，その論理式を〈tautology〉とよぶ．

以上が，syntactical な命題論理の全容である．そして，ここに定義された tautology というものが，**3** において定義したものと同一のものであることは，もはや説明を要しまい．

また，与えられた論理式 $\mathfrak{A}$ に含まれる命題変数の個数を n とすれば，この n 個の命題変数に対して定義される付値の個数は 2^n 個であるから，$\mathfrak{A}$ が tautology であるかどうかは，必ず有限回の操作ののちに判定することができるのである．

練 習 問 題

1. Elementary disjunction[1] が tautology となる条件を述べよ.

2. Conjunctive normal form となっている論理式が tautology となるための条件を述べよ.

3. Tautology の principal conjunctive normal form は何か.

4. Tautology の principal disjunctive normal form の特徴を述べよ.

---

1) Elementary conjunction の双対概念. なお, §3の 3.2 における脚注を参照.

§5. 擬順序集合

この§もまた，以後の準備のため，命題論理の研究から離れて，一般的な数学用語の解説にあてる．

1. 同値関係 (equivalence relation) ある集合において，二つの元の間の関係 $\equiv$ というものが定義されており，

反射律 $a \equiv a$

対称律 $a \equiv b$ ならば $b \equiv a$

推移律 $a \equiv b,\ b \equiv c$ ならば $a \equiv c$

が成立しているとき，この関係 $\equiv$ を**同値関係**とよぶ．

$=$ というのは，同値関係の典型的なものである．

例 1．三角形の集合を考え，二つの三角形が〈相似である〉という関係 $\backsim$ を考えると，それは

反射律 $a \backsim a$

対称律 $a \backsim b$ ならば $b \backsim a$

推移律 $a \backsim b,\ b \backsim c$ ならば $a \backsim c$

という性質を満たしている．よって，$\backsim$ は同値関係である．

例 2．同じく三角形の集合で，二つの三角形が〈合同である〉という関係 $\equiv$ は

反射律 $a \equiv a$

対称律 $a \equiv b$ ならば $b \equiv a$

推移律 $a \equiv b,\ b \equiv c$ ならば $a \equiv c$

を満たしている．よって，$\equiv$ は同値関係である．

例 3．直線の集合を考え，2 直線 a，b が〈平行である〉という関係を $a /\!/ b$ と書く．

反射律 $a /\!/ a$

対称律 $a /\!/ b$ ならば $b /\!/ a$

推移律 $a /\!/ b,\ b /\!/ c$ ならば $a /\!/ c$

となっているから，$/\!/$ は同値関係である．

例 4．整数の集合を考え，$a-b$ が n で割り切れることを，〈n を**法**として，a は b に**合同**である〉といい

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と表わす.

反射律　$a \equiv a \pmod{n}$

対称律　$a \equiv b \pmod{n}$　ならば　$b \equiv a \pmod{n}$

推移律　$a \equiv b \pmod{n}$, $b \equiv c \pmod{n}$　ならば　$a \equiv c \pmod{n}$

となるから，整数 n を一つ固定すれば，この関係は同値関係を与える.

2. 類別 (独 Klasseneinteilung)

集合 M に，同値関係 $\equiv$ が定義されているとする．M の任意の元 a に対して，

$$(a) = \{ x \; ; \; x \equiv a \}$$

という M の部分集合 (a) を定義する.

まず，推移律

$$x \equiv a,\ a \equiv b \quad \text{ならば} \quad x \equiv b$$

を書き直せば，

$$x \in (a),\ a \equiv b \quad \text{ならば} \quad x \in (b).$$

ここで，x が M の任意の元でよいということに注意すれば，これは

$$a \equiv b \quad \text{ならば} \quad (a) \subseteq (b) \qquad (1)$$

ということになる.

つぎに，対称律

$$a \equiv b \quad \text{ならば} \quad b \equiv a$$

と，(1) を

$$b \equiv a \quad \text{ならば} \quad (b) \subseteq (a)$$

と書き直したものを使えば，

$$a \equiv b \quad \text{ならば} \quad (b) \subseteq (a).$$

これと，(1) により

$$a \equiv b \quad \text{ならば} \quad (a) = (b) \qquad (2)$$

となる.

こんどは，反射律

$$a \equiv a$$

を用いる．これは

$$a \in (a) \qquad (3)$$

と書くこともできる．したがって，

$$(a)=(b) \quad \text{ならば} \quad a\in(b)$$

さらに，(b) の定義を考えれば，

$$(a)=(b) \quad \text{ならば} \quad a\equiv b \tag{4}$$

となる．(2) と (4) とをいっしょにして考えれば，$(a)=(b)$ ということが，結局 $a\equiv b$ ということを意味している，ということがわかる．

(a) という M の部分集合のことを，同値関係 $\equiv$ による一つの**同値類** (equivalence class) とよび，M の元 a を，同値類 (a) の**代表元** (representative) という．同値類の代表元は一つには定まらない．(2) と (4) によれば，同値類 (a) の代表元は，$a\equiv b$ という任意の元 b であり，また (3) によれば，同値類の代表元とは，結局，その同値類の任意の元のことである．

(3) によれば，

$$M=\bigcup_{a\in M}(a) \tag{5}$$

となるから，M の元は，必ず，いずれかの同値類に属す．また，異なった同値類は共通部分をもたない（共通部分が空集合である）．すなわち，

$$(a)\neq(b) \quad \text{ならば} \quad (a)\frown(b)=\phi. \tag{6}$$

なんとなれば，もし (a) と (b) とに共通の元 x があったとすると，

$$x\equiv a, \qquad x\equiv b.$$

対称律によって，

$$a\equiv x, \qquad x\equiv b.$$

推移律によって，

$$a\equiv b.$$

(2) によれば

$$(a)=(b).$$

これで，(6) の証明は終わった．

(5) と (6) によれば，集合 M の全体が，互いに共通部分をもたない幾つかの同値類に分けられるのである．これを，同値関係 $\equiv$ による**類別**という．

例 5．三角形の集合を同値関係 $\backsim$ (相似) で類別し，三角形 a を代

表元とする同値類 (a) のことを，三角形 a の〈形〉とよべば，$a \backsim b$ というのは，a の形 (a) と b の形 (b) とが等しいことである，ということができる．

例 6．直線の集合を同値関係 $\parallel$（平行）で類別し，直線 a を代表元とする同値類 (a) のことを，直線 a の〈方向〉とよべば，$a \parallel b$ というのは，a の方向 (a) と b の方向 (b) とが等しい，ということになる．また，このおのおのの同値類を〈無限遠点〉とよび，(a) を〈直線 a 上の無限遠点〉ということにすれば，$a \parallel b$ とは，a 上の無限遠点 (a) と b 上の無限遠点 (b) とが一致する，すなわち，2直線 a，b が無限遠点を共有することである．

例 7．n を任意の整数として，それを固定する．そのとき，$a \equiv b \pmod{n}$ という同値関係によって整数全体を類別するとき，その個々の同値類のことを，n を法とする**剰余類** (residue class) という．n を法とする剰余類とは，n で割ったときに同じ剰余をもつ整数の集合のことである．

3. **擬順序** (quasi-ordering)　ある集合において，二つの元の間の関係 $\leq$ が定義され，しかも

　反射律　$a \leq a$

　推移律　$a \leq b$，$b \leq c$　ならば　$a \leq c$

が成立しているとき，この関係 $\leq$ のことを**擬順序**という．

$\leq$ を擬順序とするとき，〈$a \leq b$ であり，しかも $b \leq a$ である〉という2元 a，b 間の関係を $a \equiv b$ と表わせば，これは，明らかに

　反射律　$a \equiv a$

　対称律　$a \equiv b$　ならば　$b \equiv a$

　推移律　$a \equiv b$，$b \equiv c$　ならば　$a \equiv c$

を満たしている．すなわち，この $\equiv$ は同値関係である．

さて，

(*)　$a \equiv a'$，$b \equiv b'$，$a \leq b$　ならば　$a' \leq b'$

となる．何となれば，$a \equiv a'$ より $a' \leq a$，$b = b'$ より $b \leq b'$ となり

$$a' \leq a,\ a \leq b,\ b \leq b'$$

に，$\leq$ に関する推移律を2回使えば

$$a' \leq b'$$

となるからである．

この同値関係 $\equiv$ によって，もとの集合を類別し，おのおのの同値類を α，β，γ，… と表わす．

定義 α および β の代表元を，それぞれ a，b とするとき，$a \leq b$ という関係が成立するとき，および，そのときに限って，$\alpha \leq \beta$ であるという．

$\alpha \leq \beta$ の定義は，じつは，α，β の代表元 a，b の選び方には無関係で，$\alpha \leq \beta$ という関係が成立するか，しないかは，同値類 α および β のみによって定まる．そのことは，まえの (*) からわかる．

同値類 α，β，γ，… の間に定義された関係 $\leq$ は，明らかに，

反射律 $\alpha \leq \alpha$

反対称律 $\alpha \leq \beta$，$\beta \leq \alpha$ ならば $\alpha = \beta$

推移律 $\alpha \leq \beta$，$\beta \leq \gamma$ ならば $\alpha \leq \gamma$

を満たす．よって，同値類の集合は，上に定義した関係 $\leq$ を順序として，順序集合となる．

とくに，同値類の間の〈反対称律〉を証明しておけば，つぎとおり：

$\alpha = (a)$，$\beta = (b)$ とおく．すなわち，a，b を α，β の代表元とする．しからば，$\alpha \leq \beta$ より

$$a \leq b.$$

また，$\beta \leq \alpha$ より

$$b \leq a.$$

ゆえに，

$$a \equiv b.$$

すなわち，

$$(a) = (b).$$

これは，$\alpha = \beta$ ということである．

4. 擬順序による束

$\leq$ を擬順序とする集合を考え，その集合の任意の 2 元 a，b に対して，$a \frown b$ および $a \smile b$ という元が，それぞれ一意的に対応し，

$$(1) \quad \begin{cases} a \frown b \leq a \\ a \frown b \leq b \\ c \leq a,\ c \leq b \quad \text{ならば} \quad c \leq a \frown b \end{cases}$$

および

$$(2)\quad \begin{cases} a \leq a \cup b \\ b \leq a \cup b \\ a \leq c,\ b \leq c \quad \text{ならば} \quad a \cup b \leq c \end{cases}$$

という性質を満足しているものとする．

さて，〈$x \leq y$ で，しかも $y \leq x$〉という2元 x，y の間の関係を $x \equiv y$ と書くことにすれば，$\equiv$ は同値関係で，その関係 $\equiv$ で類別したときの，a，b，… を代表元とする同値類を，それぞれ，(a)，(b)，… と表わすことにする．

また，$(a) \leq (b)$ が $a \leq b$ を意味することにすれば，同値類の間で定義された関係 $\leq$ によって，同値類全体の集合は順序集合となるのであった．

これによって，上の（1），（2）という性質を書き直してみると，

$$(3)\quad \begin{cases} (a \cap b) \leq (a) \\ (a \cap b) \leq (b) \\ (c) \leq (a),\ (c) \leq (b) \quad \text{ならば} \quad (c) \leq (a \cap b) \end{cases}$$

および

$$(4)\quad \begin{cases} (a) \leq (a \cup b) \\ (b) \leq (a \cup b) \\ (a) \leq (c),\ (b) \leq (c) \quad \text{ならば} \quad (a \cup b) \leq (c) \end{cases}$$

となる．（3），（4）は，$(a \cap b)$ および $(a \cup b)$ が，同値類の集合 $\{(a), (b)\}$ の，それぞれ〈下限〉および〈上限〉であることを意味している．すなわち，同値類全体の集合は〈束〉をなし，しかも

$$(a \cap b) = (a) \cap (b), \quad (a \cup b) = (a) \cup (b)$$

となっているのである．

擬順序に関しても，〈下限〉とか〈上限〉という概念を定義することはできるが，ある部分集合の下限とか上限は（〈存在する〉としても）一意的に定まるとは限らない．一意的に定まるのは，それらの属する同値類までである．また，任意の元 x に対して，つねに

$$0 \leq x$$

となる元0が存在すれば，やはり〈最小元〉とよぶが，最小元もまた一つとは限らない．0の属する同値類（0）の元はすべて最小元となっているのである．

練 習 問 題

1. 0および正負の整数の全体を I とする：

$$I=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}.$$

〈a が b の約数である〉ということを $a|b$ とかけば，この関係によって I は擬順序集合となる．

2. 前問の擬順序集合 I において，$a|b$ であることを〈a は b よりも小〉または〈b は a よりも大〉というとき〔これは，整数の普通の大小関係とは異なる〕，I の最小元は何か．

3. 整数全体の 集合 I を **1** で定義した擬順序集合と考えるとき，それは本文 **4** に述べた意味での束となる．そのときの〈結び〉および〈交わり〉は，それぞれ何を意味するか．

4. 前問の束における原子元は何か．

5. 集合 L に $<$ という関係が定義され，この関係が推移律

$$a<b,\ b<c \quad ならば \quad a<c$$

を満たしているとき，

$$a=b \quad または \quad a<b$$

という a, b の関係を $a\leq b$ と表わせば，この関係 $\leq$ は L における一つの擬順序となる．

6. 前問の関係 $\leq$ によって L が順序集合となるための条件を，与えられた関係 $<$ について述べよ．

§6. 直観主義の論理

ここでいう**直観主義** (intuitionism) とは，**数学基礎論** (foundations of mathematics) における一つの立場のことであって，オランダの数学者 L. E. J. Brouwer をその代表者とする．

ここでは，直観主義の，数学基礎論における主張や，その哲学的見解に対しては触れないけれども，つぎの1点だけには注意をしておこう．それは，直観主義の数学においては〈排中律〉を認めない，ということである．

数学者は，普通，数学におけるあらゆる命題は真か偽のいずれかに定まっている，という信念に基づいて，彼の研究を行なっている．この信念のことを排中律とよぶのであるが，普通の数学者が何故に排中律を正しいと信ずるか，直観主義者が何故に排中律の数学における使用を拒否するか，ということの解説は，本書の性質上，これ以上深入りすることはできない．ただ，命題の真偽は，原理的には，つねに定まっているかもしれないが，われわれにとって真偽の不明な命題というものが数学にはいくらでも存在するということは事実であろう．数学における未解決の問題とはすべてこの種の命題である．

真偽不明の命題が現実にある以上，その意味において，排中律を認めない直観主義の論理というものに一応の興味はもちうる．そこで以下に直観主義の論理の構造を，命題論理の範囲内で調べることにする．

排中律を認める普通の意味での論理を **直観主義の論理** (intuitionistic logic) に対比していうときは，それを**古典論理** (classical logic) と称するのである．

1. まえに真理関数の定義をしたときには (§1)，命題とは真 ($\curlyvee$) および偽 ($\curlywedge$) の二つしかないものとした．それは排中律を基礎としていることも事実であるが，さらには，それは〈原理的〉な立場，ないしは〈超越的〉な立場にたっていたのである．すなわち，すべての命題の真偽を知っている神のごとき立場である．

古典論理においても真偽不明の命題は取り扱う．真偽のわかっている

命題のみに対しては，論理は不要である．論理学の真の使命は，真偽不明の命題の真偽を，論理を用いて解きあかすことにあるのであろう．その意味では，古典論理においても，結局は，真偽不明の命題をも対象とせねばならない．

直観主義論理の研究を始めるのに，真（Y），偽（人）という二つの命題のみを対象とするが不適当であるのはいうまでもない．

そこで，ある命題の集合 $\boldsymbol{L}$ を定め，$\boldsymbol{L}$ の元たる命題を研究の対象とし，それについて超論理的考察を行なう．われわれの研究の対称が〈論理式〉ではなく，$\boldsymbol{L}$ の元であるところの〈命題〉である，という意味で，研究方法は semantics に属する．したがって命題変数

$$A,\ B,\ C,\ \cdots$$

は，$\boldsymbol{L}$ を変域とする超論理的変数である．

ここで〈命題〉というのは，すべて $\boldsymbol{L}$ の元を意味する．$\boldsymbol{L}$ の元として，真偽不明の命題が含まれている，と考えておくのは，もちろんのことである．[1]

命題 A，B に関する〈A ならば B〉という関係を

$$A \to B$$

という記号で表わす．これは，A を**前提** (premise) とすれば B が**結論** (conclusion) として得られる，ということである．ただし，ここで注意すべきことは，$A \to B$ というのは，二つの命題 A，B に関する超論理的命題を意味するのであって，$A \to B$ というのは $\boldsymbol{L}$ の元ではない，ということである．→ は，$\boldsymbol{L}$ の2元の間の超論理的関係を表わす超論理的記号である．

〈$A \to B$〉は，A を前提とすれば B が結論として得られる，ということを意味する，といったけれど，このような定義は $\boldsymbol{L}$ に関する超論理に対しては，具体的には何の効力もない．超論理的には，$\boldsymbol{L}$ において一つの関係 → が定義されている，ということ以外に何の意味もない．そこで，→ の内容的解釈を背景として，適当な公理（もちろん，超論

1）§1の初めに，

命題論理を semantics の立場で研究する場合には，そこで取り扱う命題はすべて**真偽の定まった命題**のみであるとする

と述べた．しかし，これからさきの説明では，この制限は除かれる．

理的公理）を与え，→ や $\boldsymbol{L}$ の性質を徐々に限定していこう，というのである．

1.1. まず，関係 → に対して

1.11. $A \to A$

1.12. $A \to B,\ B \to C$ ならば $A \to C$

という二つの性質を要求するのは自然であろう．1.11 を反射律，1.12 を推移律として，→ は $\boldsymbol{L}$ における一つの〈擬順序〉を与える（§5の3参照）．

論理学的には，1.11 は**同一律**（principle of identity）を意味し，1.12 は**三段論法**（syllogism）の最も典型的な形式である．

1.2. 命題 A，B に対して，〈A and B〉という命題を $A \wedge B$ と表わす．すなわち，$A \wedge B$ もまた $\boldsymbol{L}$ に属する，と考えることにするのである：

1.20. A，B を $\boldsymbol{L}$ の任意の元とすると，それに対して $A \wedge B$ という $\boldsymbol{L}$ の元が一意的に対応する．

ここで，$\wedge$ は，まえに述べた真理関数とは違う．内容的解釈においては同じかもしれないが，真理関数 $\wedge$ は，{Y，人} という集合で定義された関数であった．今回の $\wedge$ は $\boldsymbol{L}$ において定義された演算である．

この $\wedge$ に対して，つぎの性質 1.21，1.22，1.23 を要求するのは自然であろう：

1.21. $A \wedge B \to A$

1.22. $A \wedge B \to B$

1.23. $C \to A,\ C \to B$ ならば $C \to A \wedge B$

1.3. 命題 A，B に対して，〈A または B〉という命題を $A \vee B$ と表わす．1.2 におけるのと同様に：

1.30. A，B を $\boldsymbol{L}$ の任意の元とすると，それに対して $A \vee B$ という $\boldsymbol{L}$ の元が一意的に対応する．

1.31. $A \to A \vee B$

1.32. $B \to A \vee B$

1.33. $A \to C,\ B \to C$ ならば $A \vee B \to C$

この 1.33 は，有名な**両刀論法**（dilemma）と称するものの最も基本的な形式である．

ここで，中間的に，一つの定義を与えておく．

定義 $A \to B$ も $B \to A$ もともに成立することを，A と B とは同値である，といい，$A \equiv B$ と表わす．

まえの 1.11，1.12 によって，→ は $\boldsymbol{L}$ における擬順序であるから，この ≡ は $\boldsymbol{L}$ における一つの同値関係を与え，しかも，この同値関係 ≡ によって $\boldsymbol{L}$ を類別してできる同値類の全体は → によって順序集合となる（§5 の **3**）．さらに，1.20—1.23 および 1.30—1.33 によれば，その順序集合は ∧ を〈交わり〉，∨ を〈結び〉として束となる（§5 の **4**）．もちろん，同値類に対する ∧，∨ という演算は，類の代表元に対する演算によって定義するのである．

今後は簡単のために，$\boldsymbol{L}$ 自身を〈束〉とよんでしまうが，それは本来の意味での束ではない．$\boldsymbol{L}$ を束と考えるときには，等号 = の代わりに同値関係 ≡ を用いなければならない．

1.4. A，B を $\boldsymbol{L}$ の元とするとき，〈A ならば B〉という $A \to B$ は，$\boldsymbol{L}$ の元ではなかった．そこで，これとは別に $\boldsymbol{L}$ の元である〈A ならば B〉という命題を考え，これを $A \supset B$ という記号で表わそう：

1.40. A，B を $\boldsymbol{L}$ の任意の元とすると，それに対して $A \supset B$ という $\boldsymbol{L}$ の元が一意的に対応する．

すなわち，→ は，$\boldsymbol{L}$ の元の間の〈関係〉であるが，⊃ は，$\boldsymbol{L}$ の 2 元に対して定義される〈演算〉である．もし，論理と超論理とを混同すれば，それらは同じになってしまう．しかし，読者は，それらを混同してはいけない．

⊃ に関して，つぎの公理 1.41，1.42 をおく．内容的解釈の点では，問題はないであろう．

1.41. $A \wedge (A \supset B) \to B$

1.42. $A \wedge C \to B$ ならば $C \to A \supset B$

→ を $\boldsymbol{L}$ における大小関係（→ の右が大きく，左が小さい）とみなせば，$A \supset B$ は

$$A \wedge C \to B$$

となるような C の〈最大〉のものである．よって，$\boldsymbol{L}$ を同値関係 ≡ によって類別すれば，$A \supset B$ の属する同値類は，A および B の属す

る二つの同値類によって一意的に確定する．

念のために説明しておけば，証明すべきことは

$$A \equiv A',\ B \equiv B' \quad ならば \quad A \supset B \equiv A' \supset B'$$

ということである．それには，$A \equiv A'$, $B \equiv B'$ という仮定のもとで，

(1)　　$A \supset B \equiv A' \supset B'$

を導けばよい．

まず，1.41 の

$$A \wedge (A \supset B) \to B$$

と，$A \equiv A'$, $B \equiv B'$ という仮定から

$$A' \wedge (A \supset B) \to B'.$$

これに 1.42 を適用すれば

(2)　　$A \supset B \to A' \supset B'.$

同様にして

(3)　　$A' \supset B' \to A \supset B.$

この (2), (3) を合わせたものが (1) にほかならない．そしてこれが証明すべきことであった．

束論のことばを借りれば，$A \supset B$ という元のことを，B に関する A の**相対擬補元** (relative pseudo-complement) とよぶのであり，1.40 から 1.42 までは，$\boldsymbol{L}$ が**相対擬補束** (relatively pseudo-complemented lattice) である，ということを意味している．詳しくは，前にも述べたとおり，$\boldsymbol{L}$ を同値関係 $\equiv$ で類別したものに対しての名称ではあるが．

束論における定理として，相対擬補束は分配束である，というのがある．すなわち：

定理 1. $\boldsymbol{L}$ は分配束である．

証明　§2 の **5**，定理 9 の 1) によれば，

$$A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

を証明すればよい．まず，1.31 によって，

$$A \wedge B \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

これに 1.42 を適用して

$$B \to A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)].$$

同様に，1.32, 1.42 によれば，

$$C \to A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)].$$

よって，1.33 により

$$B \vee C \to A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)].$$

また，1.22 によれば

$$A \wedge (B \vee C) \to B \vee C$$

となるから，1.12 により

$$A \wedge (B \vee C) \to A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)].$$

一方，1.21 によって

$$A \wedge (B \vee C) \to A$$

であるから，1.23 により

$$A \wedge (B \vee C) \to A \wedge \{A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]\}.$$

また，1.41 によって

$$A \wedge \{A \supset [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]\} \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

となるから，1.12 によって

$$A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

が得られる．

定理 2． L には最大元が存在する．とくに，$A \supset A$ という形に表わされる元はすべて最大元である．[1]

証明 後半のみを証明すれば，前半はその結果に含まれている．

任意の元 B に対して

$$A \wedge B \to A. \qquad [1.21]$$

ゆえに，

$$B \to A \supset A. \qquad [1.42]$$

ここで，B は任意の元であった（証明終り）．

〈最大元〉の存在がわかったから，それを V という記号で表わそうと思う．詳しくは，最大元のうちの任意の一つを V と表わすのである．そうすると，定理 2 から，任意の命題 A に対して，

$$A \supset A \equiv \mathsf{V}$$

である，ということがわかる．そして，この式の左辺の形をみて，V を〈真な命題〉とよぶのが適当と思われる．

1）これまでのところ，はっきりと述べる機会がなかったが，L は空集合ではないとするのである．すなわち，以下では，少なくとも一つの命題（$=L$ の元）が存在することは，つねに仮定されている．

真な命題 $\curlyvee$ を用いると，論理的な演算 $\supset$ と超論理的関係 $\to$ との関係をはっきりさせることができる：

定理 3. $A \supset B \equiv \curlyvee$ となる必要十分条件は，$A \to B$ が成立することである．

証明 1） **必要性** $A \supset B \equiv \curlyvee$ とすれば，$\curlyvee$ が最大元であることと，1.41 により

$$A \equiv A \wedge \curlyvee \equiv A \wedge (A \supset B) \to B.$$

2） **十分性** $A \to B$ とおけば，1.21 により，任意の元 C に対して

$$A \wedge C \to A \to B.$$

さらに，1.12 と 1.42 により

$$C \to A \supset B.$$

C が任意の元であることに注意すれば

$$A \supset B \equiv \curlyvee.$$

（証明終り）

これと同様に，$\wedge$ に関するつぎの定理も得られる：

定理 4. $A \wedge B \equiv \curlyvee$ となる必要十分条件は，$A \equiv B \equiv \curlyvee$ となることである．

証明 1） **必要性** $A \wedge B \equiv \curlyvee$ ということは

$$\curlyvee \to A \wedge B$$

ということである．したがって

$$\curlyvee \to A \wedge B \to A$$

となり $A \equiv \curlyvee$ が得られる．同様に，$B \equiv \curlyvee$.

2） **十分性** $A \equiv B \equiv \curlyvee$ とすれば，

$$A \wedge B \equiv \curlyvee \wedge \curlyvee \equiv \curlyvee.$$

（証明終り）

ところが，$\vee$ に関しては，

$A \vee B \equiv \curlyvee$ となる必要十分条件は，$A \equiv \curlyvee$ または $B \equiv \curlyvee$ となることである．

という定理は得られない．その本質的な理由は，$\boldsymbol{L}$ には真偽不明な命題（$\curlyvee$ と同値でもなく，$\curlywedge$ と同値でもない元）が含まれている（かもしれない），ということによるのである．

このことは，とくに〈直観主義の論理〉というものに特有な性質ではない．〈古典論理〉においても，真偽不明な命題を取り扱う以上，必然的に，この事態が生ずるのである．たとえば，内容的な解釈において，

A が真偽不明の命題であるときには，$A \vee \neg A$ が真である（排中律）といわれても，A が真であるのか，$\neg A$ が真であるのか，われわれにはわからないであろう．しかも，このことこそが，この問題の本質に密接な関係をもつものなのであって，排中律の真の意義もここに存するのである．

このような次第であるから，じつは，〈直観主義論理〉においては，$A \vee B \equiv \mathsf{V}$ であるための必要十分条件は〈$A \equiv \mathsf{V}$ または $B \equiv \mathsf{V}$〉ということになるのではあるが，このことは，ここにおけるような semantic な考察からはわからない．これをはっきりさせるには，是非とも，syntactical な研究にまたねばならぬのである．

1.5. 直観主義の命題論理を完成させるための最後の公理は〈否定〉に関するものである：

1.50. A を $\boldsymbol{L}$ の任意の元とすると，それに対して $\neg A$ という $\boldsymbol{L}$ の元が一意的に対応する．

1.51. $(A \vee B) \wedge \neg A \to B$

1.52. $A \wedge C \to B \wedge \neg B$ ならば $C \to \neg A$

以上で，こんにち〈直観主義の命題論理〉と称せられているものの定式化は完全に終了した．

さて，否定の法則 1.51，1.52 のもつ束論的意義を少し調べておくことにしよう．

定理 5. $\boldsymbol{L}$ には最小元が存在する．とくに，$A \wedge \neg A$ という形に表わされる元はすべて最小元である．また，最大元 V の否定 $\neg \mathsf{V}$ も最小元である．

証明 まず，$A \wedge \neg A$ が最小元であることを示す．それによって，最小元の存在も同時に証明される．

B を任意の元として

$$\begin{aligned} A \wedge \neg A &\to (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) && [1.31] \\ &\to (A \vee B) \wedge \neg A && [\text{分配律}] \\ &\to B. && [1.51] \end{aligned}$$

すなわち，

$$A \wedge \neg A \to B.$$

ここで，B が任意の元であったことに注意すれば，$A \wedge \neg A$ が最小元

であることがわかる．

A もまた任意であるから，$\curlyvee \wedge \neg \curlyvee$ は最小元．しかも，$\curlyvee$ が最大元であることに注意すれば，

$$\curlyvee \wedge \neg \curlyvee \equiv \neg \curlyvee. \qquad \text{(証明終り)}$$

$\boldsymbol{L}$ の最小元を 人 という記号で表わす．最大元 $\curlyvee$ のときと同じく，人 もまた，最小元のうちの一つを表わす記号である：

$$A \wedge \neg A \equiv \text{人}, \qquad \neg \curlyvee \equiv \text{人}.$$

このために，人 のことを**矛盾** (contradiction) とよんだり，または〈偽な命題〉というのは適当であろう．

定理 5 を，もう少し一般的な形式で述べれば：

定理 6．$\boldsymbol{L}$ が分配束である，という仮定のもとで（詳しくは，$\boldsymbol{L}$ を同値関係 $\equiv$ で類別して得られる同値類の全体が分配束である，という仮定のもとで），1.51 という公理は，

1.53．人 $\rightarrow A$

1.54．$A \wedge \neg A \rightarrow$ 人

という二つの公理と同等である．

証明　1.53 は，人 が最小元である，ということを意味するし，1.54 は，$A \wedge \neg A$ が 人 より小さい，ということ，1.53 を合わせ考えれば $A \wedge \neg A$ が最小元であることを意味する．もし，1.51 があるならば，定理 5 により，最小元の一つを 人 として，1.53，1.54 が満たされる．そして，定理 5 の証明においては，$\boldsymbol{L}$ が分配束であるということ以上の性質は用いていない，ということに注意すればよい（じつは，$\boldsymbol{L}$ が分配束であるということも用いていないので，定理 5 の証明中に用いた分配律は，いわゆる one-sided distributive law であり［§2 の **5**，定理 8］，一般の束において成立するものである）．

逆に，1.53，1.54 があれば，

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge \neg A &\rightarrow (A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A) && \text{［分配律］}\\ &\rightarrow \text{人} \vee (B \wedge \neg A) && \text{［1.54］}\\ &\rightarrow B \wedge \neg A && \text{［1.53］}\\ &\rightarrow B.\end{aligned}$$

すなわち

$$(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B.$$

これは，1.51 である（証明終り）．

つぎに，1.52 については：

定理 7. $\boldsymbol{L}$ が 1.53，1.54 を満たす束（詳しくは，同値類の全体が束）であるという仮定のもとで，1.52 という公理は

1.55．$A \wedge C \to 人$ 　ならば　$C \to \neg A$

という公理と同等である．

証明 1.53，1.54 ということから，任意の元 B に対して，つねに $B \wedge \neg B \equiv 人$ ということが導かれるからである（証明終り）．

定理6，定理7によれば，1.51，1.52 という公理の代わりに，否定の公理として，1.53，1.54，1.55 を採用することもできるのである．内容的解釈という面では，1.51，1.52 のほうがわかりよいかもしれないが，数学的には，1.53，1.54，1.55 のほうが〈すなお〉な表現なのである．

さて，公理 1.41 および 1.42 の B に 人 を代入し，$A \supset B$ の部分へ $\neg A$ を代入すると，それがちょうど 1.54，1.55 になる，ということに注意を向けよう．しかも，$A \supset B$ を代表元とする同値類が，A と B によって一意的に確定するという事実（1.41，1.42 の直後の説明）によって，

$$\neg A \equiv A \supset 人$$

ということがわかる．束論のことばを借りれば，$\neg A$ は A の **擬補元** (pseudo-complement) である．最小元 人 に関する相対擬補元のことを単に〈擬補元〉というのである．たとえば，最小元 人 自身の擬補元は

$$\neg 人 \equiv 人 \supset 人 \equiv \mathrm{Y} \qquad [定理 2]$$

となり，最大元 Y である：

$$\neg 人 \equiv \mathrm{Y}$$

そこで，われわれの公理をふた組に分け，〈矛盾の公理（1.53）〉と〈否定の公理（1.54，1.55）〉とすれば，矛盾の公理だけが本質的で，否定の公理は，単なる記号の説明でしかない．もし，$\neg A$ のことを直接 $A \supset 人$ と書くことにすれば，否定の公理は不要となり，しかも $\boldsymbol{L}$ の構造には何の変化も起こらないのである．

1.6. 最後に，命題の〈同値〉について注意しておく．

〈A と B とが同値である〉ということを表わす

$$A \equiv B$$

は，超論理的命題であって，$\boldsymbol{L}$ の元ではなかった．そこで，これに相当する $\boldsymbol{L}$ の元を定義しようと思うのであるが，§1におけるように

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

を $A \sim B$ と書き，これを〈A と B とが同値である〉と読ませるのはいまの場合は，内容的解釈の点において，少し具合が悪い．何となればこの定義を内容的に解釈すれば，〈A と B とが同時に真であるか，同時に偽である〉ということになり，真偽不定の命題などは，いかなる命題とも（たとえば，自分自身とも）同値でなくなってしまう．ここでは $A \equiv B$ の定義と平行に，つぎのような定義を与える：

定義 $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ という $\boldsymbol{L}$ の元を $A \sim B$ と表わす．

直観主義論理のときは，これは実際に

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

と違う．しかし，古典論理においては，これらは一致する．しかし，それは後の話である．

定理 8. 直観主義論理 $\boldsymbol{L}$ において，$A \sim B \equiv \curlyvee$ となる必要十分条件は，$A \equiv B$ となることである．

証明 $(A \supset B) \wedge (B \supset A) \equiv \curlyvee$

となる必要十分条件は，定理4によれば

$$A \supset B \equiv \curlyvee, \quad B \supset A \equiv \curlyvee$$

がともに成立することであり，それは

$$A \rightarrow B, \quad B \rightarrow A$$

がともに成立することである．そして，これは $A \equiv B$ ということにほかならない．

2. 以上を整理すれば，直観主義論理 $\boldsymbol{L}$ とは，最小元をもつ相対擬補束である，ということになる．

まず，1.1 より 1.4 までが，$\boldsymbol{L}$ が相対擬補束であるということである．何度もいうとおり，詳しくは，$\equiv$ という同値関係によって $\boldsymbol{L}$ を類別して得られる同値類の全体が，$\rightarrow$ という半順序と $\wedge$，$\vee$，$\supset$ という三つの2項演算による相対擬補束になる，ということである．

最大元 $\curlyvee$ の存在は，$\boldsymbol{L}$ が相対擬補束であるということから導かれる

(定理２)．しかし，最小元 $\curlywedge$ の存在は，$\boldsymbol{L}$ が相対擬補束であるということだけからはわからない．1.53 は“最小元の存在”を示す公理である．1.54，1.55 は，A の否定 $\neg A$ が A の擬補元 $A \supset \curlywedge$ であることを示しているにすぎなかった．しかも，1.51，1.52 は，この 1.53，1.54，1.55 から導かれたのである（定理６，７）．

2.1．まず，これらのことからすぐにわかることを，以下に列挙しておこう(2.11—2.14)．

2.11．$\curlyvee$ が最大元であることから，つぎのことはすぐにわかる：

$$\curlyvee \vee A \equiv A \vee \curlyvee \equiv \curlyvee, \qquad \curlyvee \wedge A \equiv A \wedge \curlyvee \equiv A.$$

2.12．$\curlywedge$ が最小元であることから，つぎのことはすぐにわかる：

$$\curlywedge \wedge A \equiv A \wedge \curlywedge \equiv \curlywedge, \qquad \curlywedge \vee A \equiv A \vee \curlywedge \equiv A.$$

2.13．$\curlyvee$ が最大元，$\curlywedge$ が最小元であること，および，$\supset$ に関する公理 1.41，1.42 によれば，

$$A \supset A \equiv A \supset \curlyvee \equiv \curlywedge \supset A \equiv \curlyvee,$$
$$\curlyvee \supset A \equiv A, \qquad A \supset \curlywedge \equiv \neg A$$

となる．

証明

1) $A \supset A \equiv \curlyvee$ は： 定理２(1.4)．

2) $A \supset \curlyvee \equiv \curlyvee$ の証明：

まず，$A \supset \curlyvee$ とは，

$$A \wedge C_0 \to \curlyvee$$

および

$$A \wedge C \to \curlyvee \quad \text{ならば} \quad C \to C_0$$

という C_0 のことである．詳しくは，このような C_0 は，二つ以上あっても，$\equiv$ の意味で，すべて互いに同値となる．何となれば，$A \supset B$ というのは，

$$A \wedge C \to B$$

という C のうちの最大のものであったのだから．したがって，$A \supset \curlyvee \equiv \curlyvee$ を示すには，

$$A \wedge \curlyvee \to \curlyvee$$

および

$$A \wedge C \to \curlyvee \quad \text{ならば} \quad C \to \curlyvee$$

という二つのことを示せばよいのであるが，これらはいずれも，$\curlyvee$ が最大元であることから明らかである．

3)　$\curlywedge \supset A \equiv \curlyvee$ の証明：

$$\curlywedge \wedge \curlyvee \to A$$

および

$$\curlywedge \wedge C \to A \quad \text{ならば} \quad C \to \curlyvee$$

を確かめればよい．これは，$\curlywedge \wedge \curlyvee \equiv \curlywedge$ であること，および，$\curlyvee$ が最大元であることから明らか．

4)　$\curlyvee \supset A \equiv A$ の証明：

$$\curlyvee \wedge A \to A$$

および

$$\curlyvee \wedge C \to A \quad \text{ならば} \quad C \to A$$

を確かめればよい．これは，$\curlyvee \wedge A \equiv A$，$\curlyvee \wedge C \equiv C$ に注意すれば明らか．

5)　$A \supset \curlywedge \equiv \neg A$ については，前に述べた．

2.14.　$\neg \curlyvee \equiv \curlywedge$，　$\neg \curlywedge \equiv \curlyvee$

証明　$\neg \curlyvee \equiv \curlywedge$ については，すでに前に述べた（定理5）．しかし，

$$\neg A \equiv A \supset \curlywedge$$

を用いれば，この二つの式を，同様な方法で導くことができる：

$$\neg \curlyvee \equiv \curlyvee \supset \curlywedge \equiv \curlywedge, \qquad [\curlyvee \supset A \equiv A \text{ による}]$$

$$\neg \curlywedge \equiv \curlywedge \supset \curlywedge \equiv \curlyvee, \qquad [\curlywedge \supset A \equiv \curlyvee \text{ による}]$$

2.2.　直観主義論理 $\boldsymbol{L}$ において，

$$\boldsymbol{L}_0 = \{\curlyvee, \curlywedge\}$$

という部分集合を考えてみる．すると，

$$\neg A,\ A \vee B,\ A \wedge B,\ A \supset B$$

のいずれにおいても，A あるいは A，B を $\boldsymbol{L}_0$ の元とするとき，その値もまた $\boldsymbol{L}_0$ の元となることがわかる（2.11，2.12，2.13，2.14）．くわしくは，A や B を $\curlyvee$ または $\curlywedge$ を表わすものとするとき，$\neg A$，$A \vee B$，$A \wedge B$，$A \supset B$ はすべて $\curlyvee$ または $\curlywedge$ のいずれかと，$\equiv$ の意味において同値になる．もし同値な命題を同一視するならば，$\boldsymbol{L}$ における演算 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\supset$ は $\boldsymbol{L}_0$ における演算と考えることもできる．しかも，そのとき，$\neg$，$\vee$，$\wedge$ については，§1において述べた真理関数

¬, ∨, ∧ と完全に一致している（§1の**1**, **2**, **3**, および，この§の2.11, 2.12, 2.14）．その意味で，この§で導入した演算 ¬, ∨, ∧ は，§1での真理関数 ¬, ∨, ∧ の拡張になっているわけである．

2.21. **⊃ の真理表**　⊃ を $\boldsymbol{L}_0$ における演算（真理関数）と考えたときの関数値を真理表として示せば，つぎのようになる（2.13）：

A	B	$A \supset B$
Y	Y	Y
Y	人	人
人	Y	Y
人	人	Y

このように，⊃ は真理関数とも考えることができるから，§3の結果によれば，真理関数としては，これは，¬, ∨, ∧ という三つの真理関数の合成関数として表わすことは可能なはずである．実際に，$A \supset B$ の principal conjunctive normal form を求めてみれば，それは，つぎのようになる：

¬$(A \supset B)$=Y となる A と B，すなわち $A \supset B$=人 となる A と B を求めてみれば，上の真理表により，

A=Y, B=人

となる．したがって，¬$(A \supset B)$ の principal disjunctive normal form は

$$A \wedge \neg B$$

となり，$A \supset B$ の principal conjunctive normal form は

$$\neg A \vee B$$

となる．

このことは，A および B を $\boldsymbol{L}_0$ の元に限れば

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B$$

となる，ということであって，$\boldsymbol{L}$ 全体においてこの同値式が成り立つということではない．事実，$\boldsymbol{L}$ においては，この同値式は，必ずしも成り立たないのである．

2.22. $A \sim B$ というのは，§1においては

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

のことであるとし（§1の4），この§では

$$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

のことであるとした．これらは，直観主義論理 $\boldsymbol{L}$ においては必ずしも一致しないが，A，B を $\boldsymbol{L}_0$ の元に限った場合には，すなわち，真理関数としては，一致するのである．そのことを示すには，これらの真理表を別々につくってみてもよいし，また，2.21 の結果を利用し，つぎのように，分配法則を用いて展開してもよい：

$$\begin{aligned}
&(A \supset B) \wedge (B \supset A)\\
=&(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)\\
=&(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)\\
=&(\neg A \wedge \neg B) \vee \curlywedge \vee \curlywedge \vee (B \wedge A)\\
=&(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)\\
=&(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B).
\end{aligned}$$

練 習 問 題

以下，**1**—**7** においては，一つの直観主義論理 $\boldsymbol{L}$ について考えるものとする．

1.　$A \rightarrow \neg\neg A$

を証明せよ．また，これにより，

$$A \supset \neg\neg A \equiv \curlyvee$$

となることを示せ．

2.　$A \vee \neg A \rightarrow \neg\neg A \supset A$

［ここで，$\neg\neg A \supset A$ は $(\neg\neg A) \supset A$ の意味］

3.　$A \rightarrow B$　ならば　$\neg B \rightarrow \neg A$

［$\neg B \rightarrow \neg A$ を $A \rightarrow B$ の**対偶**という．］　一般に，

$$A \wedge C \rightarrow B \quad \text{ならば} \quad \neg B \wedge C \rightarrow \neg A$$

となることを示し，これを用いて

$$A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$$

を証明せよ．

4.　$A \rightarrow \neg B$　ならば　$B \rightarrow \neg A$.

一般に，

$$A \wedge C \rightarrow \neg B \quad \text{ならば} \quad B \wedge C \rightarrow \neg A$$

となることを示し，

$$A \supset \neg B \rightarrow B \supset \neg A$$

を証明せよ．

5．1) $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$ 〔三重否定≡否定〕

2) $\neg\neg(A \vee \neg A) \equiv \curlyvee$ 〔排中律の二重否定〕

3) $\neg\neg(\neg\neg A \supset A) \equiv \curlyvee$ 〔二重否定の除去の二重否定〕

6． $A_1 \supset (A_2 \supset (\cdots \supset (A_\mu \supset B)\cdots))$

が最大元となる必要十分条件は

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \rightarrow B$$

が成立することである．

7．直観主義論理の各公理に相当して，つぎの各命題が最大元となることを確認せよ．

1.1) $A \supset A$

1.2) $(A \supset B) \supset [(B \supset C) \supset (A \supset C)]$

2.1) $(A \wedge B) \supset A$

2.2) $(A \wedge B) \supset B$

2.3) $(C \supset A) \supset \{(C \supset B) \supset [C \supset (A \wedge B)]\}$

3.1) $A \supset (A \vee B)$

3.2) $B \supset (A \vee B)$

3.3) $(A \supset C) \supset \{(B \supset C) \supset [(A \vee B) \supset C]\}$

4.1) $[A \wedge (A \supset B)] \supset B$

4.2) $[(A \wedge C) \supset B] \supset [C \supset (A \supset B)]$

5.3) $\curlywedge \supset A$

5.4) $(A \wedge \neg A) \supset \curlywedge$

5.5) $[(A \wedge C) \supset \curlywedge] \supset (C \supset \neg A)$

8．$L=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ という集合は，数の大小関係を順序として束をなすが，それは相対擬補束である．すなわち，L の任意の元 a，b に対して，つぎの 1)，2) を満たす L の元 c が存在する：

1) $a \frown c \leq b$.

2) $a \frown x \leq b$ ならば $x \leq c$ $(x \in L)$.

この c を b に対する a の相対擬補元とよび，ここでは $a \supset b$ という記号で表わす．

上の事実を証明し，$a \supset b$ が a，b のどのような関数であるかを調べよ．また，$a \supset 0$ のことを a の擬補元とよび，ここでは $\neg a$ と表わす

が，これは a のどのような関数か．

さらに，$a=0$，$1/2$，1 としたときの

$$a \cup \neg a$$

の値を求め，それにより，排中律

$$A \vee \neg A \equiv \mathsf{V}$$

が直観主義論理で一般には成立しないことを示せ．

9．直観主義論理では，**二重否定の除去**

$$\neg\neg A \rightarrow A$$

も一般には成立しない．

10．相対擬補束においては，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ が存在すれば，

$$a \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \cap b_\lambda)$$

という弱完全分配律は成立する．

注意　一般の相対擬補束では［もし，最小元 0 が存在したとしても］，

$$a \cup \bigcap_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (a \cup b_\lambda)$$

というほうの弱完分配律は一般に成立しない．

§7. 古 典 論 理

〈古典論理〉とは，〈直観主義論理〉に，公理としてさらに

排中律　$A \vee \neg A \equiv \vee$

をつけ加えたものをいう．その意味で，この§でも，まえの§6において取り扱った集合 $\boldsymbol{L}$——命題の集合——についての考察をつづける．

1.　記号の意味や内容をはっきりさせるために，直観主義論理の復習から話を始める．

1.1.　まず，$\boldsymbol{L}$ は → という関係によって擬順序集合となっていた．これは，つぎのことを意味する：

0)　$\boldsymbol{L}$ の任意の2元 A，B のおのおのに対して，

$$A \to B$$

という関係が成立するか，成立しないか，ということがすべて定義されている．

1)　$A \to A$.

2)　$A \to B$, $B \to C$　ならば　$A \to C$.

定義　$A \to B$ および $B \to A$ のいずれもが成立することを $A \equiv B$ と表わす．

1.11．この定義による ≡ は同値関係である：

1)　$A \equiv A$.

2)　$A \equiv B$　ならば　$B \equiv A$.

3)　$A \equiv B$, $B \equiv C$　ならば　$A \equiv C$.

このことは，→ が擬順序であるということから，すぐに示すことができる．

1.12．$\boldsymbol{L}$ を ≡ によって類別すれば，その同値類の全体の集合は → を順序とする順序集合となる．これは，実質的には，つぎのことを意味する：

0)　$A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $A \to B$　ならば　$A' \to B'$.

1)　$A \to A$

2)　$A \to B$, $B \to A$　ならば　$A \equiv B$.

3)　$A \to B$, $B \to C$　ならば　$A \to C$.

この 1) と 3) は，→ が擬順序であるということ，そのものである. 2) は ≡ の定義から，そして 0) は，≡ の定義と 3) とからすぐにわかる.

1.2.　つぎに，$\boldsymbol{L}$ は，→ という擬順序と，∨ および ∧ という演算によって束をなす（§5 の **4**）.

すなわち：

1.0)　$A, B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \vee B \in \boldsymbol{L}$.

1.1)　$A \to A \vee B$,　$B \to A \vee B$.

1.2)　$A \to C$, $B \to C$　ならば　$A \vee B \to C$.

2.0)　$A, B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \wedge B \in \boldsymbol{L}$.

2.1)　$A \wedge B \to A$,　$A \wedge B \to B$.

2.2)　$C \to A$, $C \to B$　ならば　$C \to A \wedge B$.

以上は，∧ と ∨ に関する公理であった（§6 の 1.2，1.3）.

1.3.　$\boldsymbol{L}$ は分配束である.

（§6 の 定理 1.）

1.4.　$\boldsymbol{L}$ は最大元 Ｙ および最小元 人 をもつ.

（§6 の 定理 2 および 定理 6 の 1.53.）

1.5.　$\boldsymbol{L}$ は可補束である.

すなわち：

0)　$A \in \boldsymbol{L}$　ならば　$\neg A \in \boldsymbol{L}$.

1)　$A \vee \neg A \equiv$ Ｙ.

2)　$A \wedge \neg A \equiv$ 人.

ここで，1) が〈排中律〉，0) と 2) は §6 の 1.5 による［0) は §6 の 1.50，2) は §6 の 定理 5］

可補分配束のことを Boole 束または Boole 代数 とよぶのであったから（§2，**7**），上の 1.3 と 1.5 により，≡ を等号とみなすことによって $\boldsymbol{L}$ が Boole 代数となっていることがわかる.

2.　$\boldsymbol{L}$ は，∨ を〈結び〉，∧ を〈交わり〉，$\neg A$ を A の補元としての Boole 代数となるが，$\boldsymbol{L}$ にはもう一つ ⊃ という演算があった.

$\supset$ に関する公理 (§6, 1.4)：

0)　$A,\ B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \supset B \in \boldsymbol{L}$.

1)　$A \wedge (A \supset B) \to B$.

2)　$A \wedge C \to B$　ならば　$C \to A \supset B$.

この $\supset$ について，以下，つぎの二つの事項を説明する：

Ⅰ. $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

Ⅱ. $\boldsymbol{L}$ が [$\equiv$ を等号としての] Boole 代数であるということだけを用いれば，$\neg A \vee B$ をもって $A \supset B$ の代用をすることができる.

説明の都合上，Ⅱのほうから始める.

2.1.　$\boldsymbol{L}$ を [$\equiv$ を等号としての] Boole 代数とすれば，

1°)　$A \wedge (\neg A \vee B) \to B$.

2°)　$A \wedge C \to B$　ならば　$C \to \neg A \vee B$.

証明

1°)
$$
\begin{aligned}
A \wedge (\neg A \vee B) &\equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B) \\
&\equiv \curlywedge \vee (A \wedge B) \\
&\equiv A \wedge B.
\end{aligned}
$$

であるから，

$$A \wedge (\neg A \vee B) \to B.$$

2°)　$A \wedge C \to B$　と仮定すれば，

$$(*)\qquad \neg A \vee (A \wedge C) \to \neg A \vee B.$$

この左辺を分配律で展開して計算すれば，

$$
\begin{aligned}
\neg A \vee (A \wedge C) &\equiv (\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee C) \\
&\equiv \curlyvee \wedge (\neg A \vee C) \\
&\equiv \neg A \vee C.
\end{aligned}
$$

よって，

$$C \to \neg A \vee (A \wedge C).$$

これと (*) とより

$$C \to \neg A \vee B.$$

(証明終り)

これで，Ⅱの説明としては十分である.

2.2.　さて，$\supset$ に関する公理を一言にしていえば，$A \supset B$ とは

$$A \wedge C \to B$$

となるような C の最大のものである，ということになる．一方，2.1

によれば，$\neg A \vee B$ も，このような C の最大のものであった．一般に，順序集合においては，ある性質をもつ元のうちに最大のものがあったとしても，その最大元は一つしかない．われわれの考えている $\boldsymbol{L}$ は擬順序集合であったけれども，$\equiv$ を等号とみなせば，$\boldsymbol{L}$ を順序集合と考えることができるから，

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B$$

ということがわかる．

これを詳しく述べると：

2.1 の 2°) の C として $A \supset B$ を用い，$\supset$ に関する公理の 1) によれば，

(1)　　$A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$

$\supset$ に関する公理の 2) の C として $\neg A \vee B$ を用い，2.1 の 1°) によれば

(2)　　$\neg A \vee B \rightarrow A \supset B.$

この (1), (2) を合わせて

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B.$$

以上によって，古典論理においては，$\boldsymbol{L}$ を Boole 代数と考えるならば，$A \supset B$ を $\neg A \vee B$ の略記号と考えることもできるし，また，$\supset$ を基本的な演算として，それに関する公理を導入しても，本質的には何の変わりもない，ということがわかった．

3.　最後に，

古典論理とは Boole 代数そのものである

ということに注意しておく．

このことの正確な意味は，つぎのとおりである：

古典論理としての $\boldsymbol{L}$ は Boole 代数であった．逆に，$\boldsymbol{L}$ を［$\equiv$ を等号としての］Boole 代数とすれば，古典論理としての $\boldsymbol{L}$ の公理は，すべてこの仮定から導かれる．

このことを示すために，$\boldsymbol{L}$ の本来の意味における公理を，一応，列挙しておこう：

$\rightarrow$ に関する公理

0.1)　$A \rightarrow A.$

0.2)　$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C$　ならば　$A \rightarrow C.$

$\vee$ に関する公理

1.0)　$A,\ B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \vee B \in \boldsymbol{L}$.

1.1)　$A \to A \vee B, \quad B \to A \vee B$.

1.2)　$A \to C,\ B \to C$　ならば　$A \vee B \to C$.

$\wedge$ に関する公理

2.0)　$A,\ B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \wedge B \in \boldsymbol{L}$.

2.1)　$A \wedge B \to A, \quad A \wedge B \to B$.

2.2)　$C \to A,\ C \to B$　ならば　$C \to A \wedge B$.

$\supset$ に関する公理

3.0)　$A,\ B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \supset B \in \boldsymbol{L}$.

3.1)　$A \wedge (A \supset B) \to B$.

3.2)　$A \wedge C \to B$　ならば　$C \to A \supset B$.

$\neg$ に関する公理

4.0)　$A \in \boldsymbol{L}$　ならば　$\neg A \in \boldsymbol{L}$.

4.1)　$A \wedge \neg A \to \curlywedge$.

4.2)　$A \wedge C \to \curlywedge$　ならば　$C \to \neg A$.

$\curlyvee$, $\curlywedge$ に関する公理

5.1)　$A \to \curlyvee$.

5.2)　$\curlywedge \to A$.

排中律

6)　$\curlyvee \to A \vee \neg A$.

4.1), 4.2), 5.2) は，それぞれ，§6 の 1.54, 1.55, 1.53 であり (§6 の 定理6，定理7)，5.1) は，$\curlyvee$ が $\boldsymbol{L}$ の最大元ということである (§6 の定理2).

排中律 6) を除けば，これらは直観主義論理の公理系である.

$\equiv$ は，1.1 におけるのと同じに定義する．そうすれば，5.1) を考えに入れれば，6) は

$$A \vee \neg A \equiv \curlyvee$$

というのと同じことになる.

まえの **2** で述べたとおり，$\supset$ に関する公理は問題外としてよい．し

てみれば，4.2）以外の公理は，すべて Boole 代数の公理そのものになっている．

Boole 代数の公理から 4.2）を導くには，つぎのようにすればよい：

$A \wedge C \to \curlywedge$ と仮定すれば，それは

$$A \wedge C \equiv \curlywedge$$

ということであるから［5.2）による］，

$$\begin{aligned} \neg A &\equiv \neg A \vee \curlywedge \\ &\equiv \neg A \vee (A \wedge C) \\ &\equiv (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \vee C) \\ &\equiv \curlyvee \wedge (\neg A \vee C) \\ &\equiv \neg A \vee C. \end{aligned}$$

ところが，

$$C \to \neg A \vee C.$$

ゆえに，

$$C \to \neg A.$$

練 習 問 題

以下すべて，一つの古典論理 $\boldsymbol{L}$ について考えるものとする．

1. $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$

を示し，これを用いて，

$$A \to B$$

が成立する必要十分条件は，その対偶

$$\neg B \to \neg A$$

が成立することである，ということを証明せよ．

一般に，

$$A \wedge C \to B$$

が成立する必要十分条件は

$$\neg B \wedge C \to \neg A$$

が成立することである．

2. $\neg(A \supset B) \equiv A \wedge \neg B.$

3. $A \sim B = (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

によって $A \sim B$ を定義すれば，

$$A \sim B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

4. 1) $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

2) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

3) $A \supset B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

4) $A \vee B \equiv \neg A \supset B$

5) $A \wedge B \equiv \neg(A \supset \neg B)$

5. 前問と

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B$$

によれば，たとえば，$\vee$ と $\neg$ のみを用いて $A \wedge B$ も $A \supset B$ をも表現しうるし，$\wedge$ と $\neg$ または $\supset$ と $\neg$ を用いても同様であることがわかる．しかし，$\vee$, $\wedge$, $\supset$ の組み合せでは，$\neg A$ を表現することはできない．このことを証明せよ．

6. $A \vee B \equiv (A \supset B) \supset B.$

7. つぎの各命題は真（＝最大元）である：

1) $A \vee (A \supset B).$

2) $[(A \supset B) \supset A] \supset A.$ **(Peirce の法則)**

3) $[(A \supset B) \supset B] \supset [(B \supset A) \supset A].$

8. 直観主義論理に

$$A \vee (A \supset B) \equiv \curlyvee$$

を公理としてつけ加えたものは古典論理である．

9. 直観主義論理に，Peirce の法則

$$[(A \supset B) \supset A] \supset A \equiv \curlyvee,$$

または

$$[(A \supset B) \supset B] \supset [(B \supset A) \supset A] \equiv \curlyvee$$ （細井　勉）

を公理としてつけ加えれば，いずれも古典論理となる．

§8.　Sequent

定義　　$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \to B$

という関係が成立することを，

（1）　　$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B$

という記号で表わす．

この（1）のような表現を **sequent** とよぶ．[1)]

$A \to B$ は〈A ならば B〉という関係が成立しているということを意味しているのであったから，（1）は

$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu$　ならば　B

すなわち，

$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu$ という**前提**（または**仮定**）のもとで B が正しいということを表わしている（$\mu=1, 2, 3, \cdots$）．

$\mu=0$ のときの（1）としての

（2）　　$\to B$

というものも sequent と考え，それは

なんらの仮定なしで B が正しい

ということを意味する，ということにする．そのためには，つぎの定義を与えれば十分である．

定義　$\vee \to B$　を　$\to B$　と表わす．

（1）という sequent において，

$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu$

のことを**前件**（antecedent），B を**後件**（succedent）というが，ここでは単に，それらを**左辺**・**右辺**とよぶことにしよう．（2）という sequent の左辺は**空**（empty）で右辺は B である．

Sequent の左辺に現われる命題の列［その列は，空であることもあるが］を表わすには

$\Gamma,\ \Delta,\ \cdots$

というようなギリシャ文字の大文字を用いる．Γ が

1）これは，ドイツの基礎論学者 Gentzen の命名による．Gentzen はこれを **Sequenz** とよんだ．その英訳を sequent としたのは Kleene である．

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu$$

という列であれば,

$$\Gamma \rightarrow B$$

は（1）という sequent を意味し，Γ が空であれば，これは（2）を意味する．

1. Sequent の構造的性質

1.1. Sequent の左辺に現われる命題の順序は，任意に交換することができる．

すなわち：

$$\Gamma \rightarrow C$$

という sequent が成立するとき，Γ に現われる命題の順序を任意に入れかえできる命題の列を Γ' とすれば,

$$\Gamma' \rightarrow C$$

もまた成立する．

このことは，$\wedge$ に関する結合律・交換律によって，容易に知ることができる．

1.2. Sequent の左辺に同じ命題が何回も現われる場合，それが現われる回数は問題にならない．すなわち，そのうちの少なくとも一つを残して，それと同じ命題をすべて消し去ることができる．

これは，$\wedge$ に関するベキ等律

$$A \wedge A \equiv A$$

による．

1.3. Sequent の左辺に任意の命題をつけ加えることができる．

すなわち：

$$\Gamma \rightarrow C$$

という sequent が成立すれば，任意の命題 D に対して

$$D,\ \Gamma \rightarrow C$$

も成立する．

証明 Γ という列が

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu$$

であるとして,

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu$$

という命題を A とおく．ただし，$\mu=0$ [すなわち，Γ が空] のときは $A=\curlyvee$ とする．[1] しからば，

$$\Gamma \to C \quad \text{は} \quad A \to C$$

$$D,\ \Gamma \to C \quad \text{は} \quad D \wedge A \to C$$

である [$\mu=0$ のときは $D \wedge \curlyvee \equiv D$ による].

$$D \wedge A \to A$$

を用いれば，$A \to C$ から $D \wedge A \to C$ を結論することができる．

1.4. $\Gamma \to D$ および $D,\ \Delta \to C$

のいずれもが成立すれば，

$$\Gamma,\ \Delta \to C$$

も成立する．

この形式に従う推論を **cut** とよぶ．[2]

証明 Γ および Δ を，それぞれ，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \quad \text{および} \quad B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

とし，

$$A=A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu, \qquad B=B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_\nu$$

とおく．そうすれば，

$$\Gamma \to D \quad \text{は} \quad A \to D$$

$$D,\ \Delta \to C \quad \text{は} \quad D \wedge B \to C$$

$$\Gamma,\ \Delta \to C \quad \text{は} \quad A \wedge B \to C$$

である [Γ や Δ が空のときも，

$$D \wedge \curlyvee \equiv D,\ A \wedge \curlyvee \equiv A,\ \curlyvee \wedge B \equiv B$$

によって，このことはすべて正しい]．したがって，われわれの目標は

$$A \to D \quad \text{と} \quad D \wedge B \to C$$

いう仮定から

$$A \wedge B \to C$$

を導くことである．

まず，$A \to D$ という仮定から

$$A \wedge B \to D \wedge B$$

---

1) §2の 8, 例 23. 今後は，このような〈ただし書き〉は省略する．

2) ドイツ語では **Schnitt**. これも Gentzen の命名である．

これと $D \wedge B \rightarrow C$ という仮定から

$$A \wedge B \rightarrow C$$

を導くことができる．

以上の 1.1 より 1.4 までのおのおのは，それぞれ，与えられた sequent から新しい sequent を導き出す 〈sequent の変形規則〉を示している．そのような変形規則の内容的な意味を考えて，このようなものを**推論規則** (rule of inference) とよぶ．

われわれは，推論規則を図式――**推論図**――をもって示すことがある．たとえば，1.4 で述べた cut という推論規則を

$$\frac{\Gamma \rightarrow D \quad D, \Delta \rightarrow C}{\Gamma, \Delta \rightarrow C}$$

のように表わすのである．同様な意味で，1.1，1.2，1.3 の推論規則を図示すれば，つぎのようになる：

1.1. $$\frac{\Delta, D, E, \Gamma \rightarrow C}{\Delta, E, D, \Gamma \rightarrow C}$$

1.2. $$\frac{D, D, \Gamma \rightarrow C}{D, \Gamma \rightarrow C}$$ 1.3. $$\frac{\Gamma \rightarrow C}{D, \Gamma \rightarrow C}$$

まえに述べた意味では，1.1 は sequent の左辺の命題の順序を任意に交換してよいということであったが，そのためには，隣り合った二つの命題を入れ替えるという操作を有限回繰り返せば十分であるから，上のような推論図をもって示したのである．同様な理由から，1.2 に対しても，上の推論図で示した推論だけを許すことによって［1.1 を補助的に使用すれば］同等の効果をあげうることがわかる．

Cut を含めての 以上四つの推論規則を **構造に関する推論規則** (structural rule of inference) とよぶ．

2. 命題論理の公理の sequent による表現 これまでのところ，われわれは，

$$A_1, A_2, \cdots, A_\mu \rightarrow B$$

という sequent は

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \rightarrow B$$

を意味するという定義をもとに話を進めてきた．たとえば，上に述べた

〈構造に関する推論規則〉というものも，この定義をもとにして証明されたのである．しかも，その証明がすべて直観主義論理の範囲で正しいということにも一応の注意をしておく必要がある．

§6 および §7 においては，命題の集合 $\boldsymbol{L}$ が → という 2 項関係によって擬順序集合となっているということから出発した．ここでは，sequent で表わされる関係を $\boldsymbol{L}$ において定義された基本的な関係と考え，〈構造に関する推論規則〉と〈同一律〉とをもとにして，命題論理の公理を再構成してみよう．そのほうが，基礎となる表現形式が一般化されているので，理論構成が原理的に単純になるのである．

公理の再構成に際して注意すべきことは，sequent

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B$$

は基本的な関係を表わすのであって，けっして

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \to B$$

を意味するものとして定義されたものではない，ということである．とにかく，話は完全に初めから出なおしということになる．

2.0.　まず，$\boldsymbol{L}$ を空でない集合とする．そして，$\boldsymbol{L}$ の元を命題とよぶ．つぎに，$\mu+1$ 個の任意の命題

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu,\ B$$

に対して，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B$$

という関係が成立するかしないかということが，それぞれ一意的に定義されているとする（$\mu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）．そのうえで，この関係がつぎの公理を満足しているものとするのである：

→ に関する公理

1）$D \to D$　　2）$\dfrac{\Gamma \to C}{D, \Gamma \to C}$　　3）$\dfrac{D, D, \Gamma \to C}{D, \Gamma \to C}$

4）$\dfrac{\Delta, D, E, \Gamma \to C}{\Delta, E, D, \Gamma \to C}$　　5）$\dfrac{\Gamma \to D \quad D, \Delta \to C}{\Gamma, \Delta \to C}$

ここで，2)—5) の推論図のおのおのは，それぞれ，線の上側にある sequent [5) の場合には，二つの sequent] が成立すれば，その線の下側にある sequent も成立する，ということを意味している．[1] また，いうまでもないことであるが，C，D，E は任意の命題を表わし，Γ や Δ

1）今後は，このような〈ただし書し〉はすべて省略する．

は任意の命題の有限列で，それらは空であってもさしつかえない．

2.01. §7の3における公理 0.1) は，上の公理 1) そのものである．また 0.2) は，上の 5) の特別な場合

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

[5) において，Γ を A，D を B，Δ を空としたもの] となっている．その意味で，上の公理 1)—5) は §7の3における〈→ に関する公理〉を含んでいる．

2.1. **∧ に関する公理**

0) A, $B \in \boldsymbol{L}$ ならば $A \wedge B \in \boldsymbol{L}$

1) ∧-左： $A \wedge B \to A \qquad A \wedge B \to B$

2) ∧-右： $A,\ B \to A \wedge B$

2.10. 〈∧-左〉および〈∧-右〉のことを，それぞれ，〈∧ **の除去**〉および〈∧ **の導入**〉とよぶこともある．

2.11. **〈∧-左〉について**

2.110. 公理 1) は §7の3における公理 2.1)．

2.111. → に関する公理のもとでは，∧-左として公理 1) を認めることと，つぎの推論規則を公理とすることとは同等である：

1 a) $\dfrac{A,\ \Gamma \to C}{A \wedge B,\ \Gamma \to C} \qquad \dfrac{B,\ \Gamma \to C}{A \wedge B,\ \Gamma \to C}$

2.111.1. 1) を用いて 1 a) を示すのは

$$\frac{\overset{1)}{A \wedge B \to A} \quad A,\ \Gamma \to C}{A \wedge B,\ \Gamma \to C}\ \text{cut}$$

とすればよい．もう一つの推論図についても同様．

2.111.2. 1 a) を用いて 1) を証明するには

$$\frac{A \to A}{A \wedge B \to A}\ 1\,\text{a)}$$

とする．もう一つの sequent についても同様．

2.112. → に関する公理のもとでは，∧-左として，

1 b) $\dfrac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to A} \qquad \dfrac{\Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to B}$

という推論規則を公理としても同等である．

2.112.1. 1) を用いての 1 b) の証明：

$$\dfrac{\Gamma \to A \wedge B \quad \overset{1)}{A \wedge B \to A}}{\Gamma \to A}\ \text{cut}$$

もう一つの推論図についても同様.

2.112.2.　1 b）を用いての 1）の証明：

$$\dfrac{A \wedge B \to A \wedge B}{A \wedge B \to A}\ 1\,\text{b)}$$

もう一つの sequent についても同様.

注意　1 b）という推論規則を〈∧－左〉とよぶのは，やや不自然である．それは，むしろ〈∧の除去〉とよぶに適している．公理 1）は〈∧－左〉でも〈∧の除去〉でもよいが，1 a）は sequent の〈左辺〉における∧**の導入**であり，その意味で〈∧－左〉とよばれる．1 b）は sequent の**右辺**［すなわち，sequent の**結論**を表わす部分］における〈∧の除去〉を意味している．

2.12.　〈∧－右〉**について**　→ に関する公理のもとでは，∧－右として公理 2）を認めることと，つぎの推論規則 2 a）を公理とすることとは同等である．

その意味で，推論規則としての〈∧－右〉は，sequent の**右辺**における〈∧の導入〉となっている．

2 a)　$\dfrac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}$

2.121.　2）を用いての 2 a）の証明：

$$\dfrac{\Gamma \to B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \quad \overset{2)}{A,\ B \to A \wedge B}}{\Gamma,\ B \to A \wedge B}\ \text{cut}}{B,\ \Gamma \to A \wedge B}\,(*)}{\dfrac{\Gamma,\ \Gamma \to A \wedge B}{\Gamma \to A \wedge B}\,(**)}\ \text{cut}$$

ここで，(*) という印をつけた 2 本線の部分では，→ に関する公理 4）を何回か用いる［Γ が空のときには，1 回も用いない］ことを意味し，(**) という 2 本線の部分では，→に関する公理の 3）と 4）とを何回か用いることを意味している．

今後とも，だまって 2 本線で示されている推論はすべて，→に関する公理のうちの 2)，3)，4）という推論規則を何回か［0 回のこともあ

るが] 用いて得られる，ということを意味している．Cut とよばれる推論規則 5) だけは，ある特別な理由から，それを用いるたびに，そのことを表示する．

2.122. 2a) を用いての 2) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{B,\ A \to A}}{A,\ B \to A} \quad \dfrac{B \to B}{A,\ B \to B}}{A,\ B \to A \wedge B}\ 2\,\mathrm{a)}$$

2.13. $A \wedge B,\ \Gamma \to C$

が成立するための必要十分条件は

$$A,\ B,\ \Gamma \to C$$

が成立することである．

2.131. **証明**

2.131.1. 必要性：

$$\dfrac{\overset{(\wedge\text{-右})}{A,\ B \to A \wedge B} \quad A \wedge B,\ \Gamma \to C}{A,\ B,\ \Gamma \to C}\ \mathrm{cut}$$

2.131.2. 十分性：

$$\dfrac{\overset{(\wedge\text{-左})}{A \wedge B \to B} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{(\wedge\text{-左})}{A \wedge B \to A} \quad A,\ B,\ \Gamma \to C}{A \wedge B,\ B,\ \Gamma \to C}\ \mathrm{cut}}{B,\ A \wedge B,\ \Gamma \to C}}{\dfrac{A \wedge B,\ A \wedge B,\ \Gamma \to C}{A \wedge B,\ \Gamma \to C}}\ \mathrm{cut}$$

2.132. この証明からわかるように，必要性は ∧-右 により，十分性は ∧-左 による．しかも，これが，∧-右 と ∧-左 の実質的な内容と考えることもできる．その意味でも，∧-右 と ∧-左 とは，互いに他の逆となっている．

2.14. $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \to C$

が成立するための必要十分条件は

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to C$$

が成立することである（$\mu=1, 2, 3, \cdots$）．

ここで，$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots \wedge A_\mu$ とは

$$(\cdots((A_1 \wedge A_2) \wedge A_3) \wedge \cdots) \wedge A_\mu$$

のことであるとする．

2.141. **証明** 2.13 を繰り返し用いればよい.

たとえば，$\mu=3$ とすれば：

$$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 \to C$$

となる必要十分条件は

$$A_1 \wedge A_2,\ A_3 \to C$$

ということであり，このための必要十分条件は

$$A_1,\ A_2,\ A_3 \to C$$

となることである.

2.142. われわれは，2にはいってからは，この§のは初めに挙げた sequent の定義とは独立に話を進めてきた. しかし，ここまでくれば，すなわち，→ と ∧ に関する公理を上のように述べてしまえば，事実上この§の最初の定義と同じ内容のことを証明することができる. それがこの 2.14 なのである.

2.143. $\mu=0$ のときの 2.14 はどうであろうか. 証明したいことは，

$$\curlyvee \to C$$

となる必要十分条件が

$$\to C$$

である，ということである.

$\to C$ より $\curlyvee \to C$ を導くことはできる. それは，→ に関する公理 2) によればよい.

しかし，逆は，いまのところ証明はできない. しかし，われわれは，あとで，〈⋎ に関する定理〉として

$$\to \curlyvee$$

というのを証明する (2.322). それによれば，

$$\frac{\to \curlyvee \quad \curlyvee \to C}{\to C}\ \text{cut}$$

として，$\curlyvee \to C$ から $\to C$ を導くことができる.

2.15. 上の 2.14 の結果を認めた上で

$$A,\ B \to A \wedge B$$

という〈∧-右〉を考えれば，それは

$$A \wedge B \to A \wedge B$$

と同じことになる. しかし，2.14 を証明するのに ∧-右 を用いているから，∧-右 が不要だということにはならない.

つぎに，〈∧－右〉を

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}$$

と書いた場合を考えてみる．いま，Γ を

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\rho$$

とし，

$$C = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_\rho$$

とおけば，∧－右は

$$\frac{C \to A \quad C \to B}{C \to A \wedge B}$$

となる．これは，§7の3における公理 2.2）である．この意味で，§7の3における 2.2）は〈∧－右〉を意味している．ただ，Γ が空の場合（2.143 で述べた内容）だけは，話があとにもちこされているから，いまのところ，そのぶんだけ，∧-右 のほうが 2.2）より内容が豊富になっている．しかし，他の公理を加えていくうちに，その差は消滅してしまうのである．

2.2. ∨ に関する公理

0）$A,\ B \in \boldsymbol{L}$ ならば $A \vee B \in \boldsymbol{L}$.

1）∨－右：$A \to A \vee B \qquad B \to A \vee B$

2）∨－左：$\dfrac{A,\ \Gamma \to C \quad B,\ \Gamma \to C}{A \vee B,\ \Gamma \to C}$

2.21．〈∨－右〉について

2.210．公理 1）は §7の3における公理 1.1）である．

2.211．→に関する公理のもとでは，〈∨-右〉の公理として，

1 a）$\dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \to B}{\Gamma \to A \vee B}$

という推論規則を採用しても同じことである．

2.211.1．1）を用いての 1 a）の証明：

$$\frac{\Gamma \to A \quad \overset{1)}{A \to A \vee B}}{\Gamma \to A \vee B}\ \text{cut}$$

もう一つの推論図についても同様．

2.211.2．1 a）を用いての 1）の証明：

$$\frac{A \to A}{A \to A \vee B}\ 1\,\mathrm{a})$$

もう一つの sequent についても同様.

2.212. ∨-右のことを〈∨ **の導入**〉ともいう.

2.22.〈∨-左〉について

2.220. ∨-左 は §7の3における公理 1.2) の拡張である. 事実, Γ を空としたときの ∨-左 が公理 1.2) である.

2.221. 以上に述べてきた →, ∧, ∨ に関する公理は, §7の3における公理 0.1)—2.2) をすべて含んでいるから, 集合 $\boldsymbol{L}$ は擬順序 → に関して束となっている. しかも, ∨-左 によれば, この $\boldsymbol{L}$ は分配束である. [$\boldsymbol{L}$ が分配束であることは, §7の3の 0.1)—2.2) だけからはわからない. それは単に, $\boldsymbol{L}$ が束である, ということを述べているだけだからである.]

$\boldsymbol{L}$ が分配束であることの証明

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(\wedge\text{-右})}{A, C \to A\wedge C}}{A, C \to (A\wedge C)\vee(B\wedge C)}\ \vee\text{-右} \qquad \dfrac{\overset{(\wedge\text{-右})}{B, C \to B\wedge C}}{B, C \to (A\wedge C)\vee(B\wedge C)}\ \vee\text{-右}}{\dfrac{A\vee B,\quad C \to (A\wedge C)\vee(B\wedge C)}{(A\vee B)\wedge C \to (A\wedge C)\vee(B\wedge C)}\ (2.13)}\ \vee\text{-左}$$

これで, $\boldsymbol{L}$ が分配束であることが証明されたことになる (§2の5, 定理9を参照).

2.222. われわれの研究している束 $\boldsymbol{L}$ は, 当然, 分配束となることが予想されているのであるから (§6の1.4, 定理1を参照), ∨ に関する公理のなかに, $\boldsymbol{L}$ が分配束となるということが含まれていても, それはさしつかえない. むしろ問題となるのは, それ以上のことが含まれているかどうか, ということである. しかし, 実は, それ以上のことは含まれていないということが, つぎのようにして示される:

$\boldsymbol{L}$ が, → と ∧ とに関して, 2.0 および 2.1 に述べた公理を満足するとし, その上で, ∨ を含めると分配束となるとすれば, この〈∨-左〉という公理は成立する.

証明 Γ が空のときの ∨-左 は, 束の一般的性質である. Γ が空でない場合, Γ を

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\rho \quad (\rho \geqq 1)$$

とし，

$$\Gamma^* = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_p$$

とおけば，2.14 と $\wedge$ に関する結合律により，

$$A,\ \Gamma \to C \qquad B,\ \Gamma \to C$$

から

$$A \wedge \Gamma^* \to C \qquad B \wedge \Gamma^* \to C$$

が導かれる．この二つの sequent から，$\vee$ に関する束の一般的性質によれば

$$(A \wedge \Gamma^*) \vee (B \wedge \Gamma^*) \to C$$

が得られる．ここで，分配律

$$(A \vee B) \wedge \Gamma^* \to (A \wedge \Gamma^*) \vee (B \wedge \Gamma^*)$$

を用いれば，

$$(A \vee B) \wedge \Gamma^* \to C$$

となり，$\wedge$ に関する結合律と 2.14 をふたたび用いれば，

$$A \vee B,\ \Gamma \to C$$

を導くことができる．

2.3.　$\supset$ に関する公理

0)　$A,\ B \in \boldsymbol{L}$　ならば　$A \supset B \in \boldsymbol{L}$.

1)　**$\supset$-左**：　$A,\ A \supset B \to B$

2)　**$\supset$-右**：　$\dfrac{A,\ \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}$

2.31. 〈$\supset$-左〉について

2.310.　$\supset$-左 は，2.13 のもとでは，§7 の **3** の公理 3.1) と同等．$\supset$-左 は〈$\supset$ **の除去**〉ともよばれる．

2.311.　$\to$ に関する公理のもとでは，〈$\supset$-左〉の公理として，

1 a)　$\dfrac{\Gamma \to A \quad B,\ \Delta \to C}{A \supset B, \Gamma, \Delta \to C}$

という推論規則を用いることもできる．

2.311.1.　1) を用いての 1 a) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \qquad \overset{1)}{A,\ A \supset B \to B}}{\Gamma,\ A \supset B \to B}\,\text{cut}}{A \supset B,\ \Gamma \to B} \qquad B,\ \Delta \to C}{A \supset B,\ \Gamma,\ \Delta \to C}\,\text{cut}$$

2.311.2.　1 a) を用いての 1) の証明：

$$\cfrac{\cfrac{A \to A \quad B \to B}{A \supset B,\ A \to B}\ 1\,\mathrm{a})}{A,\ A \supset B \to B}$$

2.32. 〈⊃ - 右〉について

2.320.　⊃-右 を〈⊃ **の導入**〉ともいう．

2.321.　⊃-右 を用いれば〈最大元〉の存在がわかる． $A \supset A$ という形に表わされる命題はすべて最大元なのである（§6 の 1.4，定理 2 を参照）．

これを示すには，任意の命題 D に対して

$$D \to A \supset A$$

となることを証明すればよい：

$$\cfrac{\cfrac{A \to A}{\to A \supset A}\ \supset\text{-右}}{D \to A \supset A}\ \to \text{に関する公理 2)}$$

2.322.　最大元の存在が示された以上， そのうちの 一つを $\curlyvee$ と表わせば，

$$\to \curlyvee.$$

証明　$\curlyvee$ が最大元であるとは，任意の命題 D に対して

$$D \to \curlyvee.$$

が成立することである．したがって，もちろん

$$A \supset A \to \curlyvee.$$

あとは，つぎのようにすればよい：

$$\cfrac{\cfrac{A \to A}{\to A \supset A}\ \supset\text{-右} \qquad A \supset A \to \curlyvee}{\to \curlyvee}\ \mathrm{cut}$$

これによって，2.143 で述べておいたことが完結したことになる．

2.323.　最大元 $\curlyvee$ に対して

$$\to \curlyvee$$

ということが成立するということ，ひいては，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B$$

という sequent が，$\mu=0$ の場合をも含めて，

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \to B$$

と同等であるということを示すのに，われわれは，Γ を空としたときの

$\supset$-右 を用いた．ただし，$\mu=0$ のときの

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu$$

は最大元 $\vee$ を意味する，という規約のもとにおいてである．

さて，$\rightarrow B$ と $\vee \rightarrow B$ とが同等であることを認めたうえでは,[1] 〈$\supset$-右〉は §7 の **3** の 3.2) そのものである：

まず第一に，$\supset$-右 の Γ として一つの命題 C を用いたものは

$$\frac{A \wedge C \rightarrow B}{C \rightarrow A \supset B}$$

と同等で，これは §7，**3** の 3.2) である．

逆に，一般の［空であるかもしれない］Γ に対しての $\supset$-右 も，Γ を

$$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\rho$$

としたとき ($\rho \geqq 0$)，

$$C = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_\rho$$

という C を用いれば，やはり

$$\frac{A \wedge C \rightarrow B}{C \rightarrow A \supset B}$$

と同等となり，上と同じことになってしまう．

2.4. 人 **に関する公理**

0) 人 $\in \boldsymbol{L}$

1) 人 $\rightarrow A$

2.40. この 1) は §7 の **3** における 5.2)．

2.41. この 0) と 1) は，$\boldsymbol{L}$ に最小元が存在すること，および，その最小元の一つを 人 と表わす，という二つのことを表明している．

ここで，数学的に重要なことは，最小元を 人 と表わすということではなく，**$\boldsymbol{L}$ に最小元が存在する**，ということである．それを 人 と表わすかどうかということは，単なる記号上の問題であって，$\boldsymbol{L}$ の数学的構造に何の影響をも及ぼさない．

2.42. このような観点から考えるとき，§7 の **3** における $\vee$ **に関する公理** 5.1) は，$\boldsymbol{L}$ の最大元（の一つ）を $\vee$ と書く，という単なる記号

---

1) もちろん，$\rightarrow$ や $\wedge$ に関する公理をも認めた上での話であって，当然 2.14 の結果や $\wedge$ に関する結合律は用いるのである．

上の定義にすぎない．何となれば，$\boldsymbol{L}$ における最大元の存在は，すでに 2.321 において証明されているからである．

2.5. ¬ **に関する公理**

0) $A \in \boldsymbol{L}$ ならば $\neg A \in \boldsymbol{L}$.

1) ¬-左： $A, \neg A \to$ 人

2) ¬-右： $\dfrac{A,\ \Gamma \to \text{人}}{\Gamma \to \neg A}$

2.50. ¬-左 は，2.13 のもとでは，§7 の 3 の公理 4.1) と同等である．また，⊃-右 が §7 の 3 の 3.2) と同等であるというのと同様な意味で (2.323)，¬-右 は §7 の 3 の 4.2) と同等である．

¬-左 を〈¬ **の除去**〉，¬-右 を〈¬ **の導入**〉とよぶ．

2.51. 〈¬-左〉**について** →に関する公理のもとでは，〈¬-左〉の公理として

1 a) $\dfrac{\Gamma \to A}{\neg A,\ \Gamma \to \text{人}}$

という推論規則を用いることもできる．

2.511. 1) を用いての 1a) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \qquad \overset{1)}{A,\ \neg A \to \text{人}}}{\Gamma,\ \neg A \to \text{人}}\ \text{cut}}{\neg A,\ \Gamma \to \text{人}}$$

2.512. 1 a) を用いての 1) の証明：

$$\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg A,\ A \to \text{人}}\ 1\,\text{a)}}{A,\ \neg A \to \text{人}}$$

2.52. ¬ に関する公理を一つにまとめて述べれば，それは

$$\neg A \equiv A \supset \text{人}$$

ということにほかならない．事実，¬-左

$$A,\ \neg A \to \text{人}$$

に ⊃-右 を適用すれば

$$\neg A \to A \supset \text{人}$$

が導かれ，⊃-左 の特別な形

$$A,\ A \supset \text{人} \to \text{人}$$

に ¬-右 を適用すれば，

$$A \supset 人 \to \neg A$$

が導かれる.

2.521. 逆に, ¬-左, ¬-右 のおのおのにおける $\neg A$ を $A \supset 人$ で置きかえれば, それらは, それぞれ,

$$A,\ A \supset 人 \to 人 \qquad \frac{A,\ \Gamma \to 人}{\Gamma \to A \supset 人}$$

となる. これらはともに, それぞれ, ⊃-左 および ⊃-右 の特別な形となっている.

2.522. 以上の考察を, さらに精密に分析してみれば,

¬-左 が　$\neg A \to A \supset 人$

¬-右 が　$A \supset 人 \to \neg A$

にそれぞれ対応していることを容易に確認することができる.

以上が〈直観主義論理〉の公理である. 〈古典論理〉に対しては, つぎの排中律が追加される.

2.6. **排中律**　$\to A \vee \neg A$

これは, 2.143 と 2.322 によれば, §7の3における公理 6) と同等である.

3. 〈矛盾〉について

3.0. われわれがここで〈矛盾〉とよぶのは, 人という記号で表わされた命題, すなわち, **L の最小元**のことである.

このような名称を人に与える理由は, といえば, それは任意の命題 A に対して,

(*)　$$A \wedge \neg A \equiv 人$$

ということが成立するからである. このことは, すでに §6 の 1.5 における定理 5 に述べたけれども, 上の **2** における公理系によってもういちど証明しておけば, つぎのようになる:

(*) が成立するというのは

$$A \wedge \neg A \to 人 \qquad \text{および} \qquad 人 \to A \wedge \neg A$$

の両方が成立することである.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(\land\text{-左})}{A\land\neg A\to\neg A} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{(\land\text{-左})}{A\land\neg A\to A} \quad \overset{(\neg\text{-左})}{A,\ \neg A\to\curlywedge}}{A\land\neg A,\ \neg A\to\curlywedge}\,\text{cut}}{\neg A,\ A\land\neg A\to\curlywedge}}{A\land\neg A,\ A\land\neg A\to\curlywedge}\,\text{cut}}{A\land\neg A\to\curlywedge}$$

として $A\land\neg A\to\curlywedge$ がわかり，$\curlywedge\to A\land\neg A$ は $\curlywedge$ が最小元であるということからの直接の結論である．

3.1. 上の **2** に述べた公理系において，集合 $\boldsymbol{L}$ の最小元の存在を保証するのは，ただ〈$\curlywedge$ に関する公理〉のみである．少なくとも，$\curlywedge$ が最小元であるという保証なしでは，$A\land\neg A$ が最小元であることも結論しえない．そのことは，つぎのように考えれば，容易に知ることができる：

まず，$\neg$ に関する公理は，

$$\neg A\equiv A\supset\curlywedge$$

ということを述べているにすぎないということに注意する (2.52)．したがって，$\neg A$ を $A\supset\curlywedge$ と考えることにより，$\neg$ に関する公理は問題外としてよい．そのうえで，たとえば，$\boldsymbol{L}$ の最大元を $\curlywedge$ としてみる．すなわち，

$$\curlywedge=\curlyvee$$

と考えるのである．そのときは，

$$\neg A=A\supset\curlywedge=A\supset\curlyvee\equiv\curlyvee$$

となるから，

$$A\lor\neg A\equiv A\lor\curlyvee\equiv\curlyvee$$

となり，排中律は成立する．そのほかの公理も，$\curlywedge$ が最小元であるという公理を除けば，この解釈のもとでも，すべて成立している［というのは，それらの公理はすべて，$\curlywedge$ にも $\neg$ にも直接の関係をもたぬからである］．さて，この解釈のもとで，$A\land\neg A$ を考えてみると，

$$A\land\neg A\equiv A\land\curlyvee\equiv A$$

となり，$A\land\neg A$ は A と同値である．したがって，A が最小元でない限り，$A\land\neg A$ も最小元でありえない．以上によって，任意の A に対して $A\land\neg A$ が最小元であるということを示すのに，$\curlywedge$ が最小元であるという公理が必要かくべからざるものである，ということがわか

った.[1]

このことが，〈人に関する公理〉の実質的な内容である.

3.2. **最小論理**（Minimalkalkül） 直観主義論理から人に関する公理

$$人 \to A$$

を除いたものを，Johansson は Minimalkalkül と名づけた．論理としての最小限度の要求を満たす体系という意味であろう．ここでは，それを訳して〈最小論理〉とよぶ.

最小論理においても，矛盾命題人は $\boldsymbol{L}$ の元と考えておく．そうしておかないと，¬に関する公理の意味がなくなってしまう.[2] 人は $\boldsymbol{L}$ の元ではあるが，それが $\boldsymbol{L}$ の最小元であるという主張をしないだけである．しかし，そのことは，命題人の性質を規定する公理が全然ないということにもなる．最小論理において人を〈矛盾〉と名づけても，そこで述べられていることは，単に，ある一つの命題に〈矛盾〉という名称が与えられているにすぎず，矛盾とよばれた命題がどのような性格のものであるかということについては，何も触れてはいない．してみれば，実質的な意味において，

最小論理は矛盾という概念を全然含んでいない

ということもできるのである.

3.3. **右辺が空の sequent** ここでは，新しい記号法を導入する.

定義 任意の命題の列 Γ に対して,

$$\Gamma \to 人$$

という sequent を

$$\Gamma \to$$

と表わす.

この新しい表現をも sequent とよぶ．とくに，Γ が空のときの

$$\to$$

1）もちろん，この公理系からは，$\boldsymbol{L}$ のすべての元が互いに同値である［すなわち，$\boldsymbol{L}$ の任意の元が最小元である］などということが証明できないことを確認する必要はある．しかし，このようなことは，読者にとっては，容易に知ることのできることであろう．そのことは，二つ以上の元をもつ Boole 束の存在を意味しているにすぎないからである［たとえば，§2の7の例19を参照].

2）¬に関する公理の表現を少しく変更して，人という命題を用いずに最小論理の公理系を述べることもできる.

も sequent の一種で，これを**空な sequent** とよぶ.

Sequent

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \rightarrow$$

は，内容的解釈においては，〈A_1, A_2, …, A_μ という仮定から**矛盾**を生じる〉すなわち〈A_1, A_2, …, A_μ は**矛盾**する〉ということを意味している. それは，この sequent が

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \rightarrow 人$$

ということだからである.

空な sequent

$$\rightarrow$$

は〈何の仮定もなしに矛盾を生じる〉ということである. その意味で，空な sequent は〈**矛盾**〉を表わす sequent である，と考える. 空な sequent は

$$\rightarrow 人$$

すなわち，

$$Y \rightarrow 人$$

ということで，人 が $\boldsymbol{L}$ の最小元であるならば[1]〔Y は最大元であるから〕，$\boldsymbol{L}$ の元がすべて互いに同値であるということを意味している. それは，$\boldsymbol{L}$ に属す命題のすべてが真である，と同時に，また偽でもある，ということで，これが〈矛盾する〉ということの内容的な解釈である.

3.31. 右辺が空の sequent を用いれば，¬ に関する公理をつぎのように表現することができる：

$$\neg\text{-左}:\ \frac{\Gamma \rightarrow A}{\neg A,\ \Gamma \rightarrow},\qquad \neg\text{-右}:\ \frac{A,\ \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg A}$$

〔2.5 参照. とくに，¬-左に関しては 2.51〕

3.32. 人 に関する公理によれば，

$$\frac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow A}$$

という推論規則が成立する. ここで，A は任意の命題であり，Γ は任意の命題の列である.

この推論規則は

1) 古典論理や直観主義論理では，人 は確かに $\boldsymbol{L}$ の最小元であった. しかし，最小論理の範囲では，そのようなことは必ずしもわからない.

$$\frac{\Gamma \to 人}{\Gamma \to A}$$

ということであるから，

(人 に関する公理)

$$\frac{\Gamma \to 人 \qquad 人 \to A}{\Gamma \to A}\ \text{cut}$$

とすればよい．

今後は，この推論規則も〈構造に関する推論規則〉の一種に数えることにする．

3.33．最後に，われわれは，3.31 にあげた二つの推論規則を ¬ に関する公理とした場合，3.32 に述べた推論規則を 人 に関する公理の代用とすることができる，ということを説明しよう．

3.330．最初に，話の筋道を明確にしておく．

まえの 2 において整理した公理のうち，〈人 に関する公理〉と〈¬ に関する公理〉をとり除く．そして，まず〈¬ に関する公理〉として，3.31 に述べた ¬-左 と ¬-右 を採用し，さらに

$$\frac{\Gamma \to D \qquad D,\ \Delta \to}{\Gamma,\ \Delta \to}$$

という推論規則も〈cut〉として公理につけ加えておく．この cut は，

$$\frac{\Gamma \to D \qquad D,\ \Delta \to 人}{\Gamma,\ \Delta \to 人}$$

と表わせば本来の意味での cut であるから，これを公理としてつけ加えても，cut の内容がとくにふえたことにはならない．

このように公理を修正すると，人 という命題は，公理系の表現には，表面上まったく現われない．

そこで，理論の基礎としては，人 という命題を全然用いないことにする．したがって，

$$\Gamma \to$$

という sequent も

$$\Gamma \to 人$$

の略記号とは考えず，sequent としては，〈右辺が空の sequent〉も初めから含めて考えておくのである．そのうえで，人 という命題を適当に定義し，それに対して，2 で述べた〈¬ に関する公理〉と〈人 に関す

る公理〉が成立することを示す.

3.331. 上のように公理系を修正すると, **L** に最小元があることは保証されていないから, **L** の最小元を $\curlywedge$ と書く, というわけにはいかない. そこで, つぎのように考える:

最大元の存在は公理〈⊃-右〉によって保証されている (2.321). そこで, その一つを $\curlyvee$ と書けば

$$\rightarrow \curlyvee$$

となる (2.322).

$$\frac{\rightarrow \curlyvee}{\neg \curlyvee \rightarrow}\ \neg\text{-左}$$

ということで

$$\neg \curlyvee \rightarrow$$

がわかる.

$\neg \curlyvee$ のことを $\curlywedge$ と書く. しからば,

$$\curlywedge \rightarrow$$

となる.

3.332. まず, この新しい公理系のもとでも, $\curlywedge$ を上のように定義すれば

$$\Gamma \rightarrow \curlywedge \qquad \text{および} \qquad \Gamma \rightarrow$$

という二つの sequent が同じことを表わしている, ということを示そう. そうすれば, 3.31 の ¬-左, ¬-右が本来の意味での ¬ に関する公理と同じになり (2.51 参照), この新しい公理系が, ちょうど〈最小論理〉を表わしている, ということもわかる.

$\Gamma \rightarrow \curlywedge$ と $\Gamma \rightarrow$ とが同じことであるということを示すには, 一方を仮定すれば必ず他方が導かれる, ということを示せばよい.

$\Gamma \rightarrow \curlywedge$ より $\Gamma \rightarrow$ を導く方法:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \curlywedge \quad \curlywedge \rightarrow}{\Gamma \rightarrow}\ \text{cut}$$

$\Gamma \rightarrow$ より $\Gamma \rightarrow \curlywedge$ [すなわち, $\Gamma \rightarrow \neg \curlyvee$] を導く方法:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \rightarrow}{\curlyvee,\ \Gamma \rightarrow}}{\Gamma \rightarrow \neg \curlyvee}\ \neg\text{-右}$$

3.333. 推論規則

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A}$$

を，さらに公理として用いることにすれば，これによって，

$$人 \to$$

ということから，人に関する公理

$$人 \to A$$

をすぐに導くことができる．すなわち，人が $\boldsymbol{L}$ の最小元であることが確定するのである．

4. 直観主義論理 *LJ* Gentzen は直観主義論理に対応する記号論理の公理系として LJ (logistischer intuitionistischer Kalkül) なるものを与えた．以下に列挙するのは，そのうちの命題論理に関する公理である．

そこで用いる sequent は，右辺が空のものをも含めている．すなわち sequent とは

$$\Gamma \to \Theta$$

という形のもので，Γ は任意の命題の有限列［それは，空な列であってもよい］，Θ は一つの命題かまたは空な列であるものとする．

4.1. **公理系** LJ に関する公理は，sequent によって表わされる公理と，推論規則によって表わされるものの2種類に大別される．ここでは，sequent によって表わされる公理を単に〈**公理**〉とよぶことにし，推論規則によって表わされる公理を〈**推論法則**〉とよんで，それらを区別することにする．

4.11. **公理** LJ で用いる公理は

$$D \to D$$

という形の sequent のみである．ただし，D としては任意の命題を用いてよい．

4.12 **推論法則**

4.121. **構造に関する推論規則**

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{D, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to D} \qquad \frac{D, D, \Gamma \to \Theta}{D, \Gamma \to \Theta}$$

$$\frac{\Delta, D, E, \Gamma \to \Theta}{\Delta, E, D, \Gamma \to \Theta} \qquad \textbf{Cut}: \ \frac{\Gamma \to D \quad D, \Delta \to \Theta}{\Gamma, \Delta \to \Theta}$$

4.122. **論理記号に関する推論規則**

∧-左 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A,\Gamma\to\Theta}{A\wedge B,\Gamma\to\Theta}\\[2ex]\dfrac{B,\Gamma\to\Theta}{A\wedge B,\Gamma\to\Theta}\end{array}\right.$ ∧-右 $\dfrac{\Gamma\to A\quad\Gamma\to B}{\Gamma\to A\wedge B}$

∨-左 $\dfrac{A,\Gamma\to\Theta\quad B,\Gamma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma\to\Theta}$ ∨-右 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma\to A}{\Gamma\to A\vee B}\\[2ex]\dfrac{\Gamma\to B}{\Gamma\to A\vee B}\end{array}\right.$

¬-左 $\dfrac{\Gamma\to A}{\neg A,\Gamma\to}$ ¬-右 $\dfrac{A,\Gamma\to}{\Gamma\to\neg A}$

⊃-左 $\dfrac{\Gamma\to A\quad B,\Delta\to\Theta}{A\supset B,\Gamma,\Delta\to\Theta}$ ⊃-右 $\dfrac{A,\Gamma\to B}{\Gamma\to A\supset B}$

以上の推論法則において，A, B, D, E はすべて任意の命題を表わし，Γ と Δ は［空な列をも含めての］任意の命題の有限列，Θ は一つの命題［それは任意でよいが］あるいは空な列を表わしている．

4.2. LJ は，まえに述べた直観主義の論理と，つぎの意味で同等である．

4.21. 集合 $\boldsymbol{L}$ が LJ の公理系を満たしていれば，$\boldsymbol{L}$ に最小元の存在することがわかる．

このことは，すでに 3.33［とくに，3.333］において述べたけれども，念のために，もういちど繰り返しておく：

任意の命題 A に対して，$\neg(A\supset A)$ という命題をつくれば，これは $\boldsymbol{L}$ の最小元である．それを示すには，他の任意の命題 D に対して

$$\neg(A\supset A)\to D$$

となることを証明すればよい．

証明

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A\to A}{\to A\supset A}\ \supset\text{-右}}{\neg(A\supset A)\to}\ \neg\text{-左}}{\neg(A\supset A)\to D}$$

これで，$\boldsymbol{L}$ に最小元の存在することがわかったが，その最小元の任意の一つを 人 とおけば，

人 →

となることにも注意しておく．それは，人 が最小元であるという

ことから,

$$人 \to \neg(A \supset A)$$

がわかり,前頁の証明の下から2行目より

$$\neg(A \supset A) \to$$

ということがわかるから,cut を用いることにより

$$\frac{人 \to \neg(A \supset A) \quad \neg(A \supset A) \to}{人 \to}$$

として得られる.

L の最小元を 人 とおけば,**2** に述べた公理のうちの排中律 (2.6) 以外のものをすべて **L** は満たしている.すなわち,その意味で,**L** はまえに述べた意味での直観主義論理になっている.

このことを示すのは容易である.それは,つぎのように考えればよい:

まず,2.4 の 人 に関する公理は,人 の定義から明らかである.また,2.5 の ¬-左 は

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{\neg A,\ A \to}\ 4.122\ の\ \neg\text{-}左}{A,\ \neg A \to}}{A,\ \neg A \to 人}$$

として証明されるし,2.5 の ¬-右 は

$$\cfrac{\cfrac{A,\ \Gamma \to 人 \quad 人 \to}{A,\ \Gamma \to}\ \text{cut}}{\Gamma \to \neg A}\ 4.122\ の\ \neg\text{-}右$$

という推論として表わすことができる.その他の公理は,それ自身か,または,それを同値に変形して得られる推論図 (2.111, 2.12, 2.211, 2.311) が *LJ* の推論法則になっている[しかも,4.12 における Θ が空であるものにはならない].

4.22. 逆に,集合 **L** が **2** における意味での直観主義論理になっていたとすると,

$$\Gamma \to$$

という sequent を

$$\Gamma \to 人$$

と理解することによって,**L** は *LJ* の公理をすべて満足する.

このことは,**2** に述べた種々の公理の変形 (2.111, 2.12, 2.211, 2.311, 2.51) と 3.32 によって明らかである.

4.23. この 4.21, 4.22 で述べた同等性に関して補足すべきことは，つぎの一点のみである：

LJ の公理のみを用いて

$$\Gamma \to \quad \text{および} \quad \Gamma \to 人$$

という二つの sequent の同等性を示すことができる．

証明 $\dfrac{\Gamma \to}{\Gamma \to 人}$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \to 人 \quad 人 \to}{\Gamma \to}$

4.3. 論理記号に関する推論法則のうち

$\wedge$-左，$\wedge$-右，$\vee$-右，$\neg$-左，$\supset$-左

は，それぞれ，つぎの形の公理によって置きかえることもできる．

$\wedge$ - 左： $A \wedge B \to A \qquad A \wedge B \to B$

$\wedge$ - 右： $A,\ B \to A \wedge B$

$\vee$ - 右： $A \to A \vee B \qquad B \to A \vee B$

$\neg$ - 左： $A,\ \neg A \to$

$\supset$ - 左： $A,\ A \supset B \to B$

LJ の公理系に何故にこれらの公理を用いないかといえば，それは，公理を 4.1 のごとくに述べておくことによって，後にやや詳しく述べるように（§10, 4.24），***LJ* に関する Gentzen の基本定理**なるものが成立し，その定理が記号論理の研究に少なからぬ便宜を与えてくれるからなのである．

4.4. 構造に関する推論法則

$$\frac{\Gamma \to}{\Gamma \to D}$$

を除けば〈最小論理〉が得られる．

5. 古典論理 *LK* *LJ* の公理系から古典論理の公理系を得るためには，排中律

$$\to A \vee \neg A$$

を公理として追加すればよい．しかし古典論理は，結果的には Boole 束となり（§7 の 3），それは当然〈自己双対的〉なものとなる．そこで，古典論理の公理系自身をも〈自己双対的〉に述べることが望ましい．その要求に答えるものが Gentzen によって *LK* (logistischer klassischer

Kalkül）と名づけられた公理系である．

5.0. ***LK* の sequent** 公理系を自己双対的に表現するためには，まず sequent の概念を自己双対的な表現にたえうるように拡張しておかなければならない．

LK で用いる sequent は，一般に

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

という形をしているものとする．ここで，A_1，A_2，…，A_μ および B_1，B_2，…，B_ν は任意の命題で，μ および ν は負でない任意の整数とする．したがって，たとえば，$\nu=0$ のときの

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to$$

も，$\mu=0$ のときの

$$\to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

も，さらには $\mu=\nu=0$ のときの

$$\to$$

も *LK* の sequent である．

5.01. 任意の命題（$=\boldsymbol{L}$ の元）

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

が与えられたとき（μ，$\nu \geqq 0$），

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

という sequent が成り立つかどうかということは，あらかじめ定まっているものとする．

5.02. $$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

という sequent は，結果的には，

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_\mu \to B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_\nu$$

ということを表わすことになる．しかし，このことは，以下に述べる〈*LK* の公理系〉から自然に定まることなのである．

5.1. ***LK* の公理系**

LK の公理も，sequent によって表わされる〈公理〉と〈推論法則〉に大別される．

5.11. **公理** *LK* においても，sequent で表わされる公理は

$$D \to D$$

という形のもののみとする．ここで，D は任意の命題である．

5.12. **推論法則** つぎに示す〈LK の推論法則〉においては，Γ，Δ，Θ，Λ はすべて任意の［空であってもよい］命題の有限列で，A，B，D，E はもちろん任意の命題を表わす．

5.121. **構造に関する推論規則**

$$\frac{\Gamma\to\Theta}{D,\Gamma\to\Theta}\qquad\frac{\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,D}$$

$$\frac{D,D,\Gamma\to\Theta}{D,\Gamma\to\Theta}\qquad\frac{\Gamma\to\Theta,D,D}{\Gamma\to\Theta,D}$$

$$\frac{\Delta,D,E,\Gamma\to\Theta}{\Delta,E,D,\Gamma\to\Theta}\qquad\frac{\Gamma\to\Theta,E,D,\Lambda}{\Gamma\to\Theta,D,E,\Lambda}$$

$$\textbf{Cut}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,D\quad D,\Delta\to\Lambda}{\Gamma,\Delta\to\Theta,\Lambda}$$

5.122. **論理記号に関する推論規則**

$$\wedge\text{-左}\begin{cases}\dfrac{A,\Gamma\to\Theta}{A\wedge B,\Gamma\to\Theta}\\[2ex]\dfrac{B,\Gamma\to\Theta}{A\wedge B,\Gamma\to\Theta}\end{cases}\qquad\vee\text{-右}\begin{cases}\dfrac{\Gamma\to\Theta,A}{\Gamma\to\Theta,A\vee B}\\[2ex]\dfrac{\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\vee B}\end{cases}$$

$$\wedge\text{-右}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,A\quad\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\wedge B}\qquad\vee\text{-左}\quad\frac{A,\Gamma\to\Theta\quad B,\Gamma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma\to\Theta}$$

$$\neg\text{-左}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,A}{\neg A,\Gamma\to\Theta}\qquad\neg\text{-右}\quad\frac{A,\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\neg A}$$

$$\supset\text{-左}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,A\quad B,\Delta\to\Lambda}{A\supset B,\Gamma,\Delta\to\Theta,\Lambda}\qquad\supset\text{-右}\quad\frac{A,\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\supset B}$$

5.2. ***LJ* と *LK* の関係** Sequent で表わされる公理を考えてみると（4.11, 5.11），それは LJ におけるものと LK のものと完全に一致している．また，推論法則についてみれば（4.12, 5.12），LJ の推論法則はすべて LK の推論法則の特別な場合［すなわち，sequent の右辺にたかだか 1 個の命題しかない場合］となっている．のみならず，LK の公理系において，そこに用いられる sequent を，右辺にたかだか 1 個の命題しか現われないもののみに制限すれば，それによって LJ の公理系が得られるのである．

5.3. ***LK* が古典論理の公理系を与えていることの証明** ここでは一応，LJ に

$$\to A\vee\neg A$$

という排中律を公理としてつけ加えたものを〈古典論理〉とよぶことに

しておく．それが §7 で述べた古典論理と同等なものであることはいうまでもない．

LK は，つぎの意味で，古典論理と同等である．

5.31．集合 $\boldsymbol{L}$ が LK の公理系を満たしていれば，$\boldsymbol{L}$ は古典論理となっている．

このことは，つぎの 5.311，5.312 よりわかる．

5.311．$\boldsymbol{L}$ が LJ の公理系を満たしていることは明らか (5.2)．

5.312．$\boldsymbol{L}$ においては排中律が成立する．

証明

$$\begin{array}{ll}
A\to A & \\ \hline
\to A,\ \neg A & \neg\text{-右} \\ \hline
\to A,\ A\vee\neg A & \vee\text{-右} \\ \hline
\to A\vee\neg A,\ A & \\ \hline
\to A\vee\neg A,\ A\vee\neg A & \vee\text{-右} \\ \hline
\to A\vee\neg A &
\end{array}$$

5.32．逆に，集合 $\boldsymbol{L}$ が古典論理となっていれば，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

という sequent を

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_\nu$$

のことと解釈することによって，LK の公理ならびに推論法則はすべて $\boldsymbol{L}$ において成立する．ただし，$\nu=0$ のときの

$$B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_\nu$$

は，$\boldsymbol{L}$ の最小元 人 を表わすものと考えてもよく，また，空な列を表わすものと考えてもよい．

以下，そのことを示す．

5.321．上の解釈によれば，5.121 における構造に関する推論規則のうちの cut 以外のものが $\boldsymbol{L}$ で成立することは明らかと思われる．そして，その cut が $\boldsymbol{L}$ において成立することを示すには，任意の C，D，E，Γ，Δ について

$$\frac{\Gamma\to C\vee D \quad D,\ \Delta\to E}{\Gamma,\ \Delta\to C\vee E}$$

が成立することを証明すれば十分であろう．その証明を図示すれば，つぎのようになる：

(∨-右)

$$\dfrac{\Gamma\to C\vee D \qquad \dfrac{\dfrac{C\to C\vee E}{C,\varDelta\to C\vee E} \qquad \dfrac{D,\varDelta\to E}{D,\varDelta\to C\vee E}\ \vee\text{-右}}{C\vee D,\varDelta\to C\vee E}\ \vee\text{-左}}{\Gamma,\varDelta\to C\vee E}.$$

5.322. 論理記号に関する推論規則 (5.122) のうち ∧-左および ∨-左は，本質的には，LJ の ∧-左 および ∨-左 (4.122) と同じである．5.122 の ∧-左，∨-左の Θ は，一般には，二つ以上の命題からなる列と思わなければならないが，そのときは，それらの命題を全部 ∨ で結んでしまえば，それで LJ の推論法則になってしまう．同様に考えれば，5.122 の ∨-右も，LJ における正しい推論規則となる．それ以外の推論規則も，5.121 の cut を用いれば［それはすでに証明ずみである (5.321)］，つぎのように証明することができる．

5.322.1. ∧-右：

(∧-右)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta,B \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta,A \quad A,B\to A\wedge B}{\Gamma,B\to\Theta,A\wedge B}\ \text{cut}}{B,\Gamma\to\Theta,A\wedge B}}{\Gamma,\Gamma\to\Theta,\Theta,A\wedge B}\ \text{cut}}{\Gamma\to\Theta,A\wedge B}$$

5.322.2. ¬-左：

(¬-左)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta,A \quad A,\neg A\to}{\Gamma,\neg A\to\Theta}\ \text{cut}}{\neg A,\Gamma\to\Theta}$$

5.322.3. ¬-右．ここでは排中律

$$\to A\vee\neg A$$

が有効に用いられる．この sequent を

$$\to A,\neg A$$

という形に書いて用いるのである：

(排中律)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to A,\neg A}{\to\neg A,A} \quad A,\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\neg A,\Theta}\ \text{cut}}{\Gamma\to\Theta\ \ \neg A}$$

5.322.4. ⊃-左：

(⊃-左)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta,\ A \qquad A,\ A\supset B\to B}{\Gamma,\ A\supset B\to\Theta,\ B}\ \text{cut}}{A\supset B,\ \Gamma\to\Theta,\ B}\!=\! \qquad B,\ \Delta\to\Lambda}{A\supset B,\ \Gamma,\ \Delta\to\Theta,\ \Lambda}\ \text{cut}$$

5.322.5. ⊃-右．Θ が空のときは，LJ の ⊃-右そのものである．Θ が空でないときは，それを $\vee$ で結んだ結果としての命題を C とし，

$$\dfrac{A,\ \Gamma\to C,\ B}{\Gamma\to C,\ A\supset B}$$

が成り立つことを証明すればよい．この証明には，C に関する排中律

$$\to C,\ \neg C$$

が用いられる：

$$\dfrac{\to C,\ \neg C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A,\ \Gamma\to C,\ B}{A,\ \Gamma\to B,\ C}}{\neg C,\ A,\ \Gamma\to B}\ \neg\text{-左}}{A,\ \neg C,\ \Gamma\to B}}{\neg C,\ \Gamma\to A\supset B}\ \supset\text{-右}}{\Gamma\to C,\ A\supset B}\ \text{cut}$$

5.33. LK と古典論理の同等性の説明においてあますところは，LK と古典論理との間の関係ではなく，LK の内部における問題であって，

LK においては

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu\to B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_\nu$$

という sequent が成立することと

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu\to B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_\nu$$

という sequent が成立することとは同等である

ということを示すことのみである．このことを示すためには，つぎの事実を証明すれば十分である：

LK においては，

$$\Gamma\to\Theta,\ A,\ B$$

という sequent が成立するための必要十分条件は

$$\Gamma\to\Theta,\ A\vee B$$

という sequent が成立することである．

証明

必要性：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta,\ A,\ B}{\Gamma\to\Theta,\ A,\ A\vee B}\ \vee\text{-右}}{\Gamma\to\Theta,\ A\vee B,\ A}}{\Gamma\to\Theta,\ A\vee B,\ A\vee B}\ \vee\text{-右}}{\Gamma\to\Theta,\ A\vee B}$$

十分性：

$$\dfrac{\Gamma\to\Theta,\ A\vee B \qquad \dfrac{\dfrac{A\to A}{A\to A,\ B} \qquad \dfrac{\dfrac{B\to B}{B\to B,\ A}}{B\to A,\ B}}{A\vee B\to A,\ B}\ \vee\text{-左}}{\Gamma\to\Theta,\ A,\ B}\ \text{cut}$$

5.4. ***LK*** **において論理記号に関する推論規則を sequent による公理におきかえる方法**　5.122 における各推論規則は，それぞれ，つぎの形の公理によって置きかえることができる．

$\wedge$-左：$\begin{cases} A\wedge B\to A \\ A\wedge B\to B \end{cases}$　　　$\vee$-右：$\begin{cases} A\to A\vee B \\ B\to A\vee B \end{cases}$

$\wedge$-右：　$A, B\to A\wedge B$　　　$\vee$-左：　$A\vee B\to A, B$

$\neg$-左：　$\neg A, A\to$　　　$\neg$-右：　$\to A, \neg A$

$\supset$-左：　$A, A\supset B\to B$　　　$\supset$-右：$\begin{cases} B\to A\supset B \\ \to A, A\supset B \end{cases}$

5.5. **論理記号 $\supset$ の消去**　*LK* が古典論理であることが示された以上，*LK* においても当然

$$A\supset B\equiv\neg A\vee B$$

ということが成り立つ（§7 の **2**）．しかも，$\boldsymbol{A\supset B}$ を

$$\neg A\vee B$$

として定義すれば，$\supset$ に関する推論規則（$\supset$-左，$\supset$-右）は不要になる．詳しくは，$\supset$ の推論規則が他の推論規則と公理から証明されるようになるのである．

証明

$\supset$-左：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to\Theta, A}{\neg A, \Gamma\to\Theta}\ \neg\text{-左}}{\neg A, \Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda} \qquad \dfrac{B, \Delta\to\Theta}{B, \Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda}}{\neg A\vee B, \Gamma, \Delta\to\Theta, \Lambda}\ \vee\text{-左}$$

$\supset$-右：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma\to\Theta, B}{\Gamma\to\Theta, B, \neg A}\ \neg\text{-右}}{\Gamma\to\Theta, B, \neg A\vee B}\ \vee\text{-右}}{\Gamma\to\Theta, \neg A\vee B, B}}{\Gamma\to\Theta, \neg A\vee B, \neg A\vee B}\ \vee\text{-右}}{\Gamma\to\Theta, \neg A\vee B}$$

練習問題

1. LJ (直観主義論理) においても,

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

という De Morgan の法則は成立する.

2. LJ においては,

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

という De Morgan の法則は一般には成立しないが,

1) $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$

2) $A \vee \neg A,\ \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$

は成立する.

3. 適当な相対擬補束を利用することによって, LJ では一般に

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$$

が成立しないことを示せ.

4. LJ では一般に

$$A \supset B \equiv \neg A \vee B$$

は成立しない.

5. LJ においては, つぎの 1)—3) が成立する.

1) $\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$

2) $A \vee \neg A,\ A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$

3) $B \vee \neg B,\ A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$

6. $$A \sim B = (A \supset B) \wedge (B \supset A)$$

によって $A \sim B$ を定義すれば, LJ においても

$$A \sim (A \supset B) \rightarrow B$$

が成立する (小野勝次).

7. LK において, 論理記号に関する各推論規則が, それぞれ, つぎの公理によって置きかえられることを確認せよ.

$\wedge$-左:	$A \wedge B \rightarrow A$ $A \wedge B \rightarrow B$	$\vee$-右:	$A \rightarrow A \vee B$ $B \rightarrow A \vee B$
$\wedge$-右:	$A, B \rightarrow A \wedge B$	$\vee$-左:	$A \vee B \rightarrow A, B$
$\neg$-左:	$\neg A, A \rightarrow$	$\neg$-右:	$\rightarrow A, \neg A$
$\supset$-左:	$A, A \supset B \rightarrow B$	$\supset$-右:	$B \rightarrow A \supset B$ $\rightarrow A, A \supset B$

8. LK においても LJ においても，$\vee$－左という推論規則は

$$\frac{\Gamma \to A \vee B \qquad A,\ \Gamma \to \Theta \qquad B,\ \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta}$$

という推論規則で置きかえられる．

注意 この意味で，$\vee$－左は〈$\vee$ **の除去**〉ともいわれる．

9. LK および LJ において，$\supset$－左は

$$\frac{\Gamma \to A \supset B}{A, \Gamma \to B} \qquad \frac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to A \supset B}{\Gamma \to B}$$

という推論規則のいずれによっても置きかえられる．

10. LJ における $\neg$－左，$\neg$－右の代わりに，$\neg$ に関する推論規則として，

$$\frac{A, \Gamma \to \neg B}{B, \Gamma \to \neg A}$$

を採用しても，やはり直観主義論理の公理系が得られる．

上の推論規則の代わりに

$$A \supset \neg B \to B \supset \neg A$$

という公理を採用しても同じである．

11. LK においては，$A \supset B$ を $\neg A \vee B$ で定義することができる（本文 5.5）と全く同様な意味で，$A \vee B$ を

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

として定義することができる．しかも，その場合，$\vee$ に関する推論規則は不要になる．

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$$
$$A \vee B = \neg A \supset B$$
$$A \wedge B = \neg(A \supset \neg B)$$
$$A \supset B = \neg(A \wedge \neg B)$$

として，左辺を右辺で定義する場合にも，全く同様のことがいえる．

12. 最小元の存在しない相対擬補束の例をあげることにより，最小論理の公理だけからでは最小元の存在は証明しえないことを示せ．

§9. 命　題　計　算

われわれは，§6以後，古典論理とか直観主義論理とかいうものを研究してきた．ただ，〈古典論理〉という名称にしろ〈直観主義論理〉という名称にしろ，そこでは単に，ある種の category につけられたものにすぎなかった．それはあたかも〈実数全体の集合は**体**である〉，〈有理数の全体も**体**となる〉，〈実数全体は**環**でもある〉，〈実数全体は加法に関して**群**をなす〉，等々というときの群・環・体という名称のごときものであって，古典論理とよばれるただ一つの集合（＝命題の集合）があるわけでもなく，直観主義論理としてただ一つの集合が決まるわけのものでもなかった．たとえば，これまでの用語法に従えば，古典論理はすべて直観主義論理でもあるのである．それは，あらゆる体が環である，というのと同じような意味に解釈される．

これまでの説明はやや抽象的であったから，そのことの具体的な例をあげてみよう：

いま，古典論理を用いて初等幾何学を研究する場合を考えてみる．まず，初等幾何学に現われるすべての命題の集合を $\boldsymbol{L}$ とする．しからば，$\boldsymbol{L}$ は上述の意味で古典論理となっている．しかし，$\boldsymbol{L}$ は古典論理そのものではなく，古典論理の一例である．

このような $\boldsymbol{L}$ は，種々の数学的理論に応じて，それぞれ異なるであろう．どの $\boldsymbol{L}$ もすべてが古典論理であるにしても，おのおの $\boldsymbol{L}$ は，古典論理ということ以上の，$\boldsymbol{L}$ 自身に固有な性質をもっているに違いない．たとえば，上の初等幾何学に対する $\boldsymbol{L}$ において考えたとき，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\mu \to B$$

という sequent が $\boldsymbol{L}$ において成立するからといって，この sequent が古典論理の公理系だけから証明できるとは限らない．初等幾何学特有の公理［たとえば，平行線の公理のようなもの］を用いることによって，初めて証明されるというようなことも，十分ありうるからである．

さて，このような個々別々の $\boldsymbol{L}$ の特質には無関係な，あらゆる $\boldsymbol{L}$ に共通な性質をとり出して研究するのが〈論理学〉の目的であるならば，〈論理学〉の真の研究対象は具体的な $\boldsymbol{L}$ でもなく個々の命題でもな

い．そこで問題とすべきは，どのような形式をもつ命題が論理的に真であるか，どのような形式の推論が論理的に正しいか，というところの，その〈形式〉そのものなのである．このよう観点から，われわれは，命題の形式そのものを表現するものとして〈論理式〉なるものを採用し，いままで取り扱ってきた命題の代わりに論理式をもって当面の研究対象としようと思うのである．

1. 論理式 ここで用いる論理式も，本質的には，§4 で用いたものと完全に同じものである．ただ，§4 では ⊃ という論理記号を用いていなかった，という点においてのみ異なる．

1.1. **論理式の定義**（帰納的定義）

1) Y および 人 は論理式である．

2) 個々の命題変数は論理式である．

3) $\mathfrak{A}$ が論理式ならば，$\neg\mathfrak{A}$ は論理式である．

4) $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ が論理式ならば，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ はすべて論理式である．

5) 以上の 1)―4) によって論理式であることがわかるものだけが論理式である．

1.2. 論理式が，Y とか 人 および命題変数から，どのような方法でつくられてきたかということを括弧を用いて示すということも，§4 の **2** で述べたとおりである．

論理式の例：$[A\vee\neg(B\wedge \text{Y})]\supset\neg A$

1.3. いま，論理式の全体から成る集合を $\boldsymbol{L}$ とおけば，$\boldsymbol{L}$ はつぎの性質をもっている：

0) $\boldsymbol{L}$ は空集合でない．とくに，Y，人 $\in\boldsymbol{L}$.

1) $\mathfrak{A}\in\boldsymbol{L}$ ならば $\neg\mathfrak{A}\in\boldsymbol{L}$.

2) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$ ならば $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$

3) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$ ならば $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$

4) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$ ならば $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}\in\boldsymbol{L}$

この 1)―4) という性質は，$\boldsymbol{L}$ が ¬，∧，∨，⊃ という演算に関して閉じているということであり，それらはそれぞれ，§6 以後に考えてきた命題の集合 $\boldsymbol{L}$ における個々の論理記号に関する公理での第一条件

であった．のみならず，0）もまた，§6—§8で考えてきた $\boldsymbol{L}$ について暗黙のうちに仮定されてきた重要な性質なのである．

2. §6—§8では，集合 $\boldsymbol{L}$ の元を〈命題〉とよんだけれども，その実質が何であるかということは問題にしなかった．そこでの考察で重要な役割を演じたのは $\boldsymbol{L}$ の元の本質ではなくて，→ で表わされた擬順序であり，擬順序集合としての $\boldsymbol{L}$ の代数的構造であった．そして，その代数的構造を，∧，∨，￢，⊃ という演算と → との相互関係を示す公理系をもって表現したのである．

われわれは，いま，$\boldsymbol{L}$ として論理式の全体から成る集合を考える．そこでは，∧，∨，￢，⊃ という演算は，論理式の定義からの自然な結果として定義されている．しかし，→ という擬順序は，この $\boldsymbol{L}$ にはいまだ定義されていない．したがって，まず，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ における → の意味を定めることから始めなければならない．

> §6—§8での考察においては，集合 $\boldsymbol{L}$ は〈与えられたもの〉として考えられていた．$\boldsymbol{L}$ における関係 → も演算 ∧，∨，￢，⊃ もすべて〈与えられたもの〉であるとして考えてきた．その意味で，そこでの考察は semantic なものであった．すなわち，集合 $\boldsymbol{L}$ はその代数的構造とともに，われわれとは独立に存在するものであって，われわれは単なる第三者的立場から $\boldsymbol{L}$ を考察する，というのが基本的な態度であったのである．
> しかし，今度は違う．$\boldsymbol{L}$ の元が何であるかを知らない，というのではない．$\boldsymbol{L}$ の元は，〈論理式〉という，はっきりと定義された具体的な対象である．$\boldsymbol{L}$ で定義された演算というのも，抽象的なものではなく，われわれの具体的な行為に直結している．たとえば，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ という論理式に ∧ という演算をほどこして得られる結果 $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ というのも，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ という論理式が具体的に与えられさえすれば，われわれは，それを実際に指し示す［あるいは，作り出す］ことができるのである．われわれは，集合 $\boldsymbol{L}$ を［その代数的構造をも含めて］決定する責任者であって，決して第三者ではない．$\boldsymbol{L}$ を作り出す人間として行動するのであって，受け身の態度で $\boldsymbol{L}$ を眺めるのではない．これが syntactical な研究の基本的態度であって，§6—§8における semantic な研究態度と異なるところである．

2.0. 論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ に → という関係を導入するということは,

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

という関係が成立するかどうかということを, 任意の論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対して定義することにほかならない. そして, そのような定義を一つ与えた場合, われわれは, 一つの**命題計算** (propositional calculus) が与えられた, ということにしている.

古典論理の命題計算 古典論理に対応している命題論理の公理系から, 関係

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が証明されるとき, および, そのときに限って, この関係が成立するように → を定義したもの.

直観主義論理の命題計算 直観主義論理に対応する命題論理の公理系から, 関係

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が証明されるとき, および, そのときに限って, この関係が成立するように → を定義したもの.

さて, 論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ に → という関係を適当に導入して, $\boldsymbol{L}$ が古典論理あるいは直観主義論理となるようにする方法はいろいろある. たとえば, もっとも簡単な例としては, どんな論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対してもつねに

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

という関係は成立する, ということで → を定義すれば, それで $\boldsymbol{L}$ は古典論理にも, また直観主義論理にもなっている. そのことは, たとえば, §7 の 3 に列挙しておいた公理のすべてに当たってみれば容易に知ることができる. また, 上に挙げた古典論理の命題計算や直観主義論理の命題計算もそれぞれ $\boldsymbol{L}$ を古典論理および直観主義論理にする一例を与えている. そして, このように集合 $\boldsymbol{L}$ から生じる多くの古典論理や直観主義論理のなかで, 命題計算なるものはつぎの特性をもっているものなのである:

古典論理の命題計算において

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

という関係が成立するということは, この関係が, $\boldsymbol{L}$ から生じるあらゆ

る古典論理において成立するための必要十分条件であり，直観主義論理の命題計算において

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が成立することが，$\boldsymbol{L}$ から生じるあらゆる直観主義論理においてそれが成立するための必要十分条件なのである．

2.1. **命題計算 *LK*** 古典論理の命題計算を与える直接的な方法の一例として，命題計算としての LK の体系を示そう．

2.11. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, …, $\mathfrak{A}_\mu$ および $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, …, $\mathfrak{B}_\nu$ を任意の論理式とするとき，

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{B}_\nu$$

という形式的表現を **sequent** とよぶ．ここで，$\mu=0$ あるいは $\nu=0$ であってもさしつかえないことは，これまでと同様である．

§8 においては，個々の sequent はそれぞれある意味をもつ超数学的命題を表わしていた．しかし，ここでは，論理式と同様な単なる形式的表現としか考えない．それは，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ には，いまだ擬順序 → は定義されておらず，この sequent という形式的表現を利用してそれを定義しようとしているからなのである．

2.12. LK の〈公理〉ならびに〈推論規則〉とは，以下に列挙する図式によって示されるものをいう．そこで，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$ は任意の論理式を表わし，Γ, Δ, Θ, Λ は論理式の任意の有限列を意味するものとする．

2.121. **公理** $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$

2.122. **推論規則**

2.122.1. 構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D},\ \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{D}}$$

$$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$$

$$\frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Lambda}$$

$$\text{Cut} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

2.122.2. 論理記号に関する推論規則

$$\wedge\text{-左}\begin{cases}\dfrac{\mathfrak{A},\ \Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Gamma\to\Theta}\\[2ex]\dfrac{\mathfrak{B},\ \Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B},\ \Gamma\to\Theta}\end{cases}\qquad\vee\text{-右}\begin{cases}\dfrac{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}}{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\\[2ex]\dfrac{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{B}}{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}\end{cases}$$

$$\wedge\text{-右}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\quad\Gamma\to\Theta,\mathfrak{B}}{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}\qquad\vee\text{-左}\quad\frac{\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta\quad\mathfrak{B},\Gamma\to\Theta}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B},\ \Gamma\to\Theta}$$

$$\neg\text{-左}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta}\qquad\neg\text{-右}\quad\frac{\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\neg\mathfrak{A}}$$

$$\supset\text{-左}\quad\frac{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\quad\mathfrak{B},\Delta\to\Lambda}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B},\Gamma,\Delta\to\Theta,\Lambda}\qquad\supset\text{-右}\quad\frac{\mathfrak{A},\Gamma\to\Theta,\mathfrak{B}}{\Gamma\to\Theta,\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}$$

2.13. **証明可能性** Sequent が**証明可能**（英 provable，独 beweisbar）であるという概念を，つぎのように定義する（帰納的定義）：

1) 個々の公理は証明可能である．
2) 証明可能な（1個または2個の） sequent から，推論規則のいずれかによって導かれる sequent は証明可能である．
3) 以上の 1)，2) によって証明可能であることがわかる sequent だけが証明可能である．

2.131. $$\to\mathfrak{A}$$

という sequent が証明可能であることを，論理式 $\mathfrak{A}$ が**証明可能**であるという．

2.132. $$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_\mu\to\mathfrak{B}$$

という sequent が証明可能であることを，論理式 $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, …, $\mathfrak{A}_\mu$ **から**論理式 $\mathfrak{B}$ が**証明可能**であるという．

2.14. 〈$\Gamma\to\Theta$ という sequent が証明可能である〉という超数学的命題を

$$\Gamma\Rightarrow\Theta$$

と表わすことにすれば，⇨ という関係は，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ における一つの擬順序を与え，しかも，この擬順序が古典論理の命題計算を与えるものであることは説明するまでもないであろう．また，〈証明可能〉ということばが定義されている以上，→ という形式的記号以外に，ここで定義した擬順序を表わす記号 ⇨ を用いる必要はほとんど生じない．

2.2. **命題計算 *LJ*** *LJ* という命題計算においても，命題計算 *LK* と同様に，論理式より作られる sequent を用いる．ただし，その右辺に

たかだか1個の論理式をもつ sequent しか用いない．それ以外は，まったく LK と同様である．

2.21．LJ の**公理**は，LK の公理と同じである．

2.22．LJ の**推論規則**は，LK の推論規則のうち，そこに用いられる sequent の右辺がたかだか1個の論理式のみのものである．

2.23．〈公理〉と〈推論規則〉が確定すれば，**証明可能性**についても，LK の場合（2.13）とまったく同様に定義することができる．ただ，そこでいう推論規則がすべて LJ のものであるという違いがあるにすぎないのである．

> LJ の sequent は，もちろん LK の sequent でもある．しかし，LK で証明可能な LJ の sequent は必ずしも LJ で証明可能ではない．それは，LJ での証明可能性を定義するときに用いられる推論規則が LJ のものに制限されていることによる．

3. 命題計算の体系を与える Hilbert 流の方法　われわれは，論理式の証明可能性という概念を，sequent の証明可能性をもとにして定義した（2.131）．しかし，その定義によれば，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

（という sequent）が証明可能というのは

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

という論理式が証明可能であることにほかならぬから，sequent という概念を用いずに，論理式の証明可能性だけをもとにして命題計算の体系を与えることも可能である．事実，Gentzen の LK，LJ なる体系が世に現われる以前には，つねにこの方法が用いられていたのであり，記号論理における orthodox な方法ということができる．

以下に，その方法——Hilbert 流の方法——の一例をあげよう．

3.1．**公理**

3.101．$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$

3.102．$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset [(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})]$

3.111．$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

3.112．$\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

3.113．$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset [(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}]\}$

3.121. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$

3.122. $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$

3.123. $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset \{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset [\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})]\}$

3.131. $[\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})] \supset \mathfrak{B}$

3.132. $[(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{B}] \supset [\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})]$

3.141. $(\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{A}) \supset \curlywedge$

3.142. $[(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \supset \curlywedge] \supset (\mathfrak{C} \supset \neg\mathfrak{A})$

3.151. $\mathfrak{A} \supset \curlyvee$

3.152. $\curlywedge \supset \mathfrak{A}$

3.16. $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$

(以上の公理は，§7 の 3 に列挙しておいた公理に相当している．)

3.2. **推論規則**

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \quad \textbf{(modus ponens)}$$

3.3. 論理式の**証明可能性**の定義は，2.13 に述べた sequent の証明可能性の定義とまったく同様である．すなわち：

1) 3.1 に列記した形をもつ個々の論理式は証明可能である．

2) 論理式 $\mathfrak{A}$ および論理式 $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ が証明可能ならば，論理式 $\mathfrak{B}$ も証明可能である (3.2 の推論規則)．

3) 以上の 1)，2) によって証明可能であることがわかる論理式だけが証明可能である．

3.4. 以上によって，**古典論理の命題計算**の一つの体系が与えられたことになる．以下，それを少しく検討しておこう．

3.40. 〈$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ なる論理式が証明可能である〉という超数学的命題を

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

と表わす．*LK*，*LJ* の場合と異なり，ここでは再び，→ は二つの論理式の間の超数学的関係を表わす記号と考えるのである．その上で，論理式全体の集合を $\boldsymbol{L}$ とおき，この $\boldsymbol{L}$ が，§7 の 3 に列記した公理をすべて満たすことをまず示そうと思う．

3.41. $\boldsymbol{L}$ は擬順序集合である．すなわち：

1) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$

2) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，$\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$

証明　1）は 3.101 より明らか．2）は，3.102 を利用して，modus ponens（3.2 の推論規則）を 2 回用いれば，

$$\cfrac{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C} \qquad \cfrac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B} \quad \overset{(3.102)}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\supset[(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})]}}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})}}{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C}}.$$

3.42．$\vee$ に関する公理［§7，3 の 1.1)，1.2)］は：

1)　$\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$,　　$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$

2)　$\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$　ならば　$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$

証明　1）は 3.111，3.112 より明らか．2）は，3.113 によって，

$$\cfrac{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C} \qquad \cfrac{\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C} \quad \overset{(3.113)}{(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{C})\supset\{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset[(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}]\}}}{(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C})\supset[(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}]}}{(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\supset\mathfrak{C}}.$$

3.43．その他の $\wedge$，$\supset$，$\neg$，$\curlyvee$，$\curlywedge$ に関する公理もすべて，3.121—3.152 により，必要に応じて modus ponens を用いれば，容易に示すことができる．

3.44．論理式 $\mathfrak{A}$ が証明可能であるとは，$\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}$ の最大元となっていることである．

証明　1）　$\mathfrak{A}$ が証明可能であるとして，任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対して $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$ が証明可能であることを示す：

$$\cfrac{\mathfrak{A} \qquad \cfrac{\overset{(3.121)}{(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A}} \quad \overset{(3.132)}{[(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\supset\mathfrak{A}]\supset[\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})]}}{\mathfrak{A}\supset(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})}}{\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}}.$$

2)　逆に，$\mathfrak{A}$ を $\boldsymbol{L}$ の最大元とすれば，任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対して $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}$ が証明可能であるが，$\mathfrak{B}$ として公理のうちの任意の一つ（たとえば：$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{A}$）を採用することにより，

$$\frac{\mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}\supset\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$$

として，$\mathfrak{A}$ は証明可能となる．

3.45．公理 3.151 は，$\curlyvee$ が $\boldsymbol{L}$ の最大元であることを示している．さらに上の 3.44 によれば，$\mathfrak{A}$ が証明可能ということと

$$\curlyvee\supset\mathfrak{A}$$

が証明可能ということとは同じことになる．したがって，公理 3.16 が

§7の**3**における排中律

$$\curlyvee \to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$$

に相当していることがわかる.

3.46. 以上で, 3.40 のように → を 定義することによって $\boldsymbol{L}$ が古典論理となることはわかった. けれども, それは, $\boldsymbol{L}$ を古典論理とする一つの方法であるにすぎぬかもしれない. それが〈古典論理の**命題計算**〉であるというためには, なおいっそうの吟味を必要とする.

$\boldsymbol{L}$ を古典論理とするような擬順序 → を $\boldsymbol{L}$ に導入する方法はいろいろある. それは, 一般には, 3.40 で定義した → とは異なるであろう. いま, その任意の一つを固定して考えると, それに関して

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

となる必要十分条件は, やはりその擬順序に関して

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

が最大元となることである. したがって, われわれは, 3.3 で定義した意味において**証明可能**な論理式のすべてが, $\boldsymbol{L}$ を古典論理とする任意の擬順序に関して, つねに**最大元**を与える, ということを示す. それによって, 3.1 の公理と 3.2 の推論規則が, 古典論理の命題計算を与えていることがわかるのである.

それを示すには, まず, 3.1 に列記した公理のすべてが最大元を与えていることを確認する [ここでは, その確認を省略する : §6, 練習問題, **7** を参照]. ついで, modus ponens に関して, $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ が最大元であるとき $\mathfrak{B}$ もまた最大元である, ということをみればよい. このことは, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ が最大元であるということが $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ を意味するということから容易に知ることができる. そして, これによって, 3.3 の意味で証明可能なすべての論理式が最大元を与えることがわかる.

3.5. 以上の議論からわかるように, もし, 3.1 の公理より 3.16 を除けば, それによって**直観主義論理の命題計算**が得られ, さらに 3.152 を除けば**最小論理の命題計算**が得られる.

4. 命題計算の体系と論理式に関する一般的注意

4.1. *LK* や *LJ* という命題計算においては, $\curlyvee$ および $\curlywedge$ という命題記号は, 命題変数とまったく同等の取り扱いしか受けていない. した

がって，$\curlyvee$ や $\curlywedge$ が，〈真な命題（＝最大元)〉とか〈偽な命題（＝最小元)〉にはなっていないのである．そこで，われわれは通常つぎのように考える：

LK あるいは *LJ* においては，$\curlyvee$ および $\curlywedge$ という記号を全然含まない論理式を用いる．もし，$\curlyvee$ とか $\curlywedge$ という記号を用いたとしても，それは本来の意味の記号としてではなく，$\curlyvee$ は証明可能な或る論理式〔たとえば，$A \supset A$〕を代表する**超数学的**記号として用いられ，$\curlywedge$ も，その否定が証明可能となる或る論理式〔たとえば，$A \wedge \neg A$〕を表わすものとして用いられる．

4.2. 3 で与えた Hilbert 流の命題計算においては，$\curlyvee$ および $\curlywedge$ はその記号それ自身として，命題変数とは異なる特殊な取り扱いを受けているから，超数学的記号と考うべきではなく，本来の意味での命題記号と考えなければならない．事実，3.151 は，$\curlyvee$ が最大元であること，すなわち，$\curlyvee$ が証明可能であることを示している．しかし，$\curlyvee$ は 3.151 以外の公理や推論規則には現われないのであるから，$\curlyvee$ を〈証明可能な論理式〉を表わす超数学的記号と考えて，公理 3.151 を除いても，命題計算としての本質に変わりはない．

これと同様なことを，$\curlywedge$ について，すぐさま行なうわけにはいかない．$\curlywedge$ という記号は，公理 3.1 において，3.141，3.142，3.152 の三つの場所に用いられているから，いささかの工夫を必要とするのである．

4.3. やはり 3 で与えた命題計算において，否定記号 $\neg$ を超数学的記号と考えることもできる．そのように考えるときは，$\neg$ という記号を含まぬ論理式のみを取り扱う．したがって，3.141 および 3.142 という公理は除かれる．その上で，$\neg\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$ の略記号と考えるのである．しからば，3.141 は 3.131 の特別な場合，3.142 は 3.132 の特別な場合として，実質上これに含まれることになる．

ただし，古典論理に対しては，排中律 3.16 を

$$\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{A} \supset \curlywedge)$$

という形で保存しておく必要はある．

4.4. このようなことは，ほかにもいろいろとある．たとえば，古典論理の命題計算に限るならば，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ を $\neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ の略記号，$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ を $\neg(\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B})$ の略記号，または，$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ を $\neg(\neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B})$ あ

るいは $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$ の略記号と考える，などのこともできる．

われわれは，つねにあらゆる論理式を考える必要はない．むしろ，そのときどきに応じて，ある特殊な論理式だけを用いるのが便利であり，しかも，それによってなんらの一般性を失うことがない．のみならず，それをどのような論理式に限定すべきかということも，命題計算の個々の体系を規定する公理や推論規則の述べ方によって，おのずから定まってしまうものなのである．

練 習 問 題

1. 論理記号 $\supset$ を含まぬ論理式のみからつくられている sequent $\mathfrak{S}$ が LK で証明可能ならば，$\supset$ に関する推論規則を全然用いずに $\mathfrak{S}$ は証明可能である．

2. $$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$$

が $\supset$ を含まない sequent であるとき，この sequent に現われる論理式を

$$\mathfrak{B}_\nu, \cdots, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_\mu, \cdots, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1$$

と逆の順に並べかえ，さらに $\wedge$ と $\vee$ を入れかえて得られる sequent をもとの sequent の**双対**という．

$\supset$ を含まない sequent が LK で証明可能ならば，LK ではその双対もまた証明可能である（**双対の原理**）．

3. LJ に関しては〈双対の原理〉が成り立たないということを，例をあげて説明せよ．

4. LJ において，

$$\neg\neg\mathfrak{A}, \neg\neg(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \rightarrow \neg\neg\mathfrak{B}$$

という形の sequent はすべて証明可能である．

5. 本文 3.1 に公理としてあげた 3.101—3.16 までのいずれかの形をもつ任意の論理式を $\mathfrak{A}$ とするとき，$\mathfrak{A}$ がどの形のものであっても，$\neg\neg\mathfrak{A}$ は直観主義の命題計算においてすべて証明可能である．

6. 論理式 $\mathfrak{A}$ が古典命題計算で証明可能ならば，$\neg\neg\mathfrak{A}$ は直観主義の命題計算で証明可能である (Glivenko)．

7. $\neg\mathfrak{A}$ という形の任意の論理式は，それが古典命題計算で証明可能ならば，直観主義の命題計算でも証明可能である．

8. 論理記号として $\wedge$ と $\neg$ のみを含む論理式が古典命題計算で証明可能ならば，それは直観主義の命題計算でも証明可能である (Gödel).

§10.　命題計算の完全性

命題論理に関する叙述を完結するために，ここで，われわれは，つぎの二つの事実を示す：

Ⅰ．古典論理の命題計算において証明可能な論理式はみな tautology である．

Ⅱ．任意の tautology はすべて**古典論理**の命題計算において証明可能である．

このⅠ，ⅡのうちのⅡという性質を〈命題計算の**完全性**（completeness)〉とよぶ．

以上を一括して述べれば，

ある論理式が古典論理の命題計算において証明可能となるための必要十分条件は，その論理式が tautology であることである

ということになる．そして，このことが，命題計算の完全性のもつ実質的な内容である．

われわれは，まず**1**において，〈完全性〉の実質的な内容というものの意味を簡単に解説し，ついで，**2**においてⅠの証明を，**3**においてⅡの証明を行なう．そして最後に，**4**において，これに関連ある二，三の事項に触れようと思う．

1.　§4の**3**において述べた定義によれば，tautology とは**つねに真な論理式**（immer richtige Formel）のことである．詳しくは，そこに現われるすべての命題変数のおのおのに，それぞれ任意の命題を代入するとき，どのような命題の代入に対しても，つねに真な命題が得られるような論理式，それを tautology というのであった．もっとも，そこでの tautology とは，⊃という論理記号を含まぬ論理式についてのみ定義されたものであったけれども，⊃を含む論理式にまで tautology の概念を拡張することは容易である．その上で，まず第一に，古典論理の命題計算で証明可能な論理式はすべてそのような〈つねに真な論理式〉に限るのである．したがって，当然のことながら，直観主義論理や，あるいは最小論理の命題計算のごとき，古典論理の命題計算の部分体系[1]のなか

で証明可能な論理式はすべて〈つねに真な論理式〉に限られている．そして第二に，これとは逆に，〈つねに真な論理式〉がすべて証明可能である，という意味において，**古典論理**の命題計算は**完全**（complete）なのである．しかし，直観主義論理や最小論理の命題計算は，このような意味での完全性をもたない．[2)]

1.1. 命題計算の完全性によって，命題計算の〈決定問題〉の解法が簡単に得られる．

命題論理において**決定問題**（decision problem, Entscheidungsproblem）というとき，それは通常つぎの二とおりの意味に解釈される：

その第一は tautology に関する決定問題で，

任意に与えられた論理式が tautology であるかないかを決定すること

であり，その第二は

任意に与えられた論理式が証明可能であるかないかを決定することである．

そして，この第一の問題は，§4の**4**においても注意したごとく，tautology の定義によれば，ほとんど自明なことであって，論理式が与えられれば，それが tautology であるかどうかを必ず有限回の操作ののちに判定することができる．また第二の問題も，話を古典論理の命題計算に限るならば，命題計算の完全性によって，第一の問題と結局は同一の問題であるのだから，やはり肯定的に解決されたことになる．

与えられた論理式が直観主義論理の命題計算で証明可能かどうかを決定するという，いわゆる**直観主義の命題論理の決定問題**も——じつは，最小論理についても同様に——肯定的に解決されはするが，ここに述べた古典論理に対するような簡単な解法は得られていない．

1）［前頁の脚注］ある命題計算の体系 $\boldsymbol{S}$ で証明可能な論理式の範囲が，命題計算の別の体系 $\boldsymbol{T}$ で証明可能な論理式の範囲の一部分になっているとき，$\boldsymbol{S}$ を $\boldsymbol{T}$ の**部分体系**（subsystem）という．

2）たとえば，排中律を表わす論理式 $A \vee \neg A$ は tautology ではあるが，LJ では証明不可能である．もちろん，適当な論理式 $\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ が LJ で証明可能となることはありうる——たとえば，$\mathfrak{A}$ を LJ で証明可能な論理式とすればよい．しかし，命題変数 A に対しては，$A \vee \neg A$ は LJ で証明可能でない．$A \vee \neg A$ が証明可能ならば，任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ が証明可能となるからである．

1.2.　命題計算の完全性を，つぎのような観点からも考えることができる：

§1―§9における命題論理の叙述には，じつは，本質的に異なった2種類の立脚点よりなされたものが含まれている．その第一のものは，§1，§3，§4 における〈真理関数の研究〉であって，そこでは，命題というものは V（＝真）および 人（＝偽）の二つしかないという考え方が基調になっていた．そして，その研究方法を syntactical に整理すれば，すべてが tautology に関する決定問題に帰着されるのであった．それに反して，§6―§9における研究は，第一の立脚点とは異なり，命題は必ずしも V と 人 の二つには限らないという，いわゆる第二の考え方を基調としている．そこでは，とくに命題間の相互関係が重視され，V とか 人 というものは，まったくそれに従属して現われた特殊な命題にすぎなかった．そして，そのような命題間の関係において，$\vee$，$\wedge$，$\supset$，$\neg$ という論理演算が純粋に論理的な立場からはどのような働きをするかということを，はっきりと記述する方法として得られたのが命題計算というものであった．このように，まったく相異なる思想より導かれた〈tautology の概念〉と〈命題計算〉というものが，話を古典論理に限るならば，syntactical には実は同等なものになる，というのが命題計算の完全性の意味するところである．

この二つの立脚点の相異は，命題論理の範囲内では，さほど分明ではない．しかしそのことは，第Ⅱ編で述べる述語論理においては重要である．たとえば，任意の自然数を代表する変数 a を含む命題〈$a=1$〉を考えた場合，a の値を定めぬ限り，これは真でも偽でもない．したがって，第一の立脚点にたつ場合には，これを命題と認めるわけにはいかない．もし，〈$a=1$〉を命題と考えるならば，それはすでに第二の立脚点にたっているのである．古典論理においては，排中律

$$a=1 \vee \neg(a=1)$$

は真な命題を表わすけれども，それは〈真偽の定まっている命題しか取り扱っていない〉ということを意味しているわけではない．

1.3.　〈tautology[1)]〉の概念にせよ〈命題計算〉にせよ，いずれも syn-

1）ここでいう〈tautology〉とは，§4 の 4 において与えた定義によるものとする．

tactical なものである．それに反して，上に述べた二つの立脚点と称するものは，ともに semantic な考え方である．われわれは，tautology とか命題計算とかいうものが，いかなる思想によって導かれ，あるいは形成されうるかということを示すために，そのような semantics から出発したのであって，tautology や命題計算そのものだけを理解するためには，semantics は不要である．もし，tautology とか命題計算をもとにして考えるならば，第一および第二の立脚点というものも，単に，それぞれに対する一つの解釈（interpretation）を与えているにすぎない．〈解釈〉というものは，ただ一とおりしか考えられないものではない．古典論理の命題計算を第一の立脚点によって解釈することも，もちろん可能である．

2. まず，命題計算において証明可能な論理式が tautology であることを示す．その目的のために，⊃ という記号を含む論理式や sequent にまで tautology の概念を拡張することから始める．

2.1. いま，一つの〈付値〉が与えられたとする．すなわち，すべての命題変数のおのおのに $\curlyvee$ または $\curlywedge$ という〈真理値〉が一つずつ対応しているとする．[1] そして，論理式や sequent のその付値に関する〈真理値〉というものをつぎのように定義する．

2.11. **論理式の真理値**

2.111. $\curlyvee$ の真理値は $\curlyvee$，$\curlywedge$ の真理値は $\curlywedge$．

2.112. 命題変数の真理値は，付値が与えられたということよって，すでに定義されている．

2.113. $\mathfrak{A}$ の真理値が $\curlyvee$ ならば，$\neg\mathfrak{A}$ の真理値は $\curlywedge$．$\mathfrak{A}$ の真理値が $\curlywedge$ ならば，$\neg\mathfrak{A}$ の真理値は $\curlyvee$．

2.114. $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ の真理値がともに $\curlyvee$ ならば，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の真理値も $\curlyvee$．それ以外の場合には，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ の真理値は $\curlywedge$．

2.115. $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ の真理値がともに $\curlywedge$ ならば，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ の真理値も $\curlywedge$．それ以外の場合には，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ の真理値は $\curlyvee$．

1）§4 の 4.3 においては，〈有限個〉の命題変数にのみ真理値を対応させるものだけを付値とよんだが，〈すべて〉の命題変数に真理値を対応させておいても本質的には同じである．のみならず，このほうが叙述が簡単になる．

2.116. $\mathfrak{A}$ の真理値が $\forall$ で $\mathfrak{B}$ の真理値が 人 ならば，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の真理値は 人．それ以外の場合には，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の真理値は $\forall$．

2.12. **Sequent の真理値**

$$\Gamma \to \Theta$$

という sequent において，その左辺 Γ に真理値が 人 の論理式がある か，または右辺 Θ に真理値が $\forall$ の論理式があれば，$\Gamma \to \Theta$ の真理値は $\forall$．それ以外の場合には，$\Gamma \to \Theta$ の真理値は 人．

2.13. 付値を一つ固定して考えれば，論理式あるいは sequent のおのおのに対して，その真理値は一意的に確定する．

2.14. 左辺が空で右辺が一つの論理式からなる sequent

$$\to \mathfrak{A}$$

の真理値は，論理式 $\mathfrak{A}$ の真理値と一致する．

2.15. 空な sequent

$$\to$$

の真理値は 人 である．

2.16. 右辺と左辺が同一のただ一つの論理式からなる sequent

$$\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$$

の真理値は $\forall$ である．

2.2. 任意の付値に対して，つねに真理値が $\forall$ となる論理式および sequent を **tautology** という．

2.21. 左辺が空で右辺が一つの論理式からなる sequent

$$\to \mathfrak{A}$$

が tautology となる必要十分条件は，論理式 $\mathfrak{A}$ が tautology であることである．

2.22. 任意の論理式 $\mathfrak{D}$ に対して

$$\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$$

という sequent は tautology である．

2.23. 空な sequent

$$\to$$

は tautology ではない．

2.3. われわれは，古典論理の命題計算として命題計算 LK を採用することにして，LK で証明可能な sequent がすべて tautology である

ことを示す．それによって，*LK* で証明可能な論理式もまたすべて tautology であることがわかる（2.21 および §9 の 2.131）．

そのためには，まず任意の付値を一つ固定し，その上で，*LK* で証明可能な sequent の真理値がつねに V であることを示せばよい．

LK の公理（§9 の 2.121）の真理値は V である（2.16）．ゆえに，あとは，真理値が V であるような［1個または2個の］sequent から，*LK* の推論規則（§9 の 2.122）のおのおのによって導かれる sequent の真理値がつねに V である，ということを示せば，それで十分である．以下，そのことを示す．

推論規則によって導かれる sequent を，その推論規則の**結論**（conclusion）とよび，その結論を導くのに用いられる［1個または2個の］sequent を**前提**（premise）という．つぎに述べるすべての場合を通じて前提の真理値はつねに V であると仮定しておく．その仮定のもとで，おのおのの推論規則について，その結論の真理値も V であることを示すのである．

2.31．構造に関する推論規則のうちの cut 以外のものでは，前提の左辺に現われるすべての論理式は結論の右辺に現われ，前提の右辺に現われるすべての論理式は右辺に現われる．よって，もし前提の左辺に 人 を真理値とする論理式が現われれば，結論の左辺にもその論理式が現われ，もし前提の右辺に V を真理値とする論理式が現われれば，結論の右辺にもその論理式は現われる．いずれにしても，結論の真理値は V である．

2.32．Cut ならびに論理記号に関する推論規則の場合：

2.321．推論規則の表（§9 の 2.122.1，2.122.2）における Γ，あるいは Γ または Δ のなかに，真理値 人 の論理式が現われる場合：

結論の真理値が V であることは明らか．

2.322．推論規則の表における Θ，あるいは Θ または Λ のなかに真理値 V の論理式が現われる場合：

結論の真理値が V であることは明らか．

2.323．推論規則の表における Γ および Δ のなかには真理値 人 の論理式が現われず，Θ および Λ のなかにも真理値 V の論理式が現われない場合：

2.323.1.　Cut の場合：

前提 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}$ の真理値が ⋎ であることから，$\mathfrak{D}$ の真理値は ⋎ でなければならず，前提 $\mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda$ の真理値が ⋎ であることからは，$\mathfrak{D}$ の真理値が 人 でなければならないことになる．したがって，このような場合はありえない．

2.323.2.　$\wedge$-左 の場合：

前提 $\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta$ の真理値が ⋎ であるから，$\mathfrak{A}$ の真理値は 人 である．よって，$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ の真理値も 人 である．ゆえに，この推論の結論 $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta$ の真理値は ⋎ である．

$\wedge$-左 のもう一つの形式についても同様．

2.323.3.　$\vee$-右 の場合：

前提 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}$ の真理値が ⋎ であるから，$\mathfrak{A}$ の真理値は ⋎ である．よって，$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ の真理値も ⋎ である．ゆえに，この推論の結論 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ の真理値は ⋎ である．

$\vee$-右のもう一つの形式についても同様．

(以上，2.323.3 は 2.323.2 の〈双対〉である．)

2.323.4.　$\wedge$-右 の場合：

前提 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}$ および $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}$ の真理値がともに ⋎ であるから，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ の真理値もともに ⋎．よって，$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ の真理値も ⋎．ゆえに，結論 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ の真理値も ⋎．

2.323.5.　$\vee$-左 の場合：2.323.4 の双対．

2.323.6.　$\neg$-左 の場合：

前提 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}$ の真理値が ⋎ であるから，$\mathfrak{A}$ の真理値は ⋎．よって，$\neg\mathfrak{A}$ の真理値は 人．ゆえに，結論 $\neg\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta$ の真理値は ⋎．

2.323.7.　$\neg$-右 の場合：2.323.6 の双対．

2.323.8.　$\supset$-左 の場合：

前提 $\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda$ の真理値がともに ⋎ るあるから，$\mathfrak{A}$ の真理値は ⋎ で，$\mathfrak{B}$ の真理値は 人．よって，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の真理値は 人．ゆえに，結論 $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda$ の真理値は ⋎．

2.323.9.　$\supset$-右 の場合：

前提 $\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}$ の真理値が ⋎ であるから，$\mathfrak{A}$ の真理値が 人 であるか、$\mathfrak{B}$ の真理値が ⋎．よって，このいずれにしても，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の真

理値は V. ゆえに，結論 $\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ の真理値は V.

3. こんどは，tautology がすべて *LK* において証明可能であることを示す．したがって，ここで取り扱う論理式は ∨ とか ∧ という命題記号を含まないものに限る［もし

$$\to \vee \qquad \text{および} \qquad \wedge \to$$

という公理を *LK* につけ加えれば，∨ や ∧ を含む論理式をも取り扱えるが，ここでは，それは考えないことにする］.

3.1. まず，補助定理を列挙する．いずれも，2.32 で述べたことの精密化ないしは一般化であるので，もはや証明を要しないほど明らかなことと思われる．

ここで述べる補助定理は，与えられた sequent［あるいは論理式］が tautology であるかどうかを判定する方法としても利用しうるので，当面の目的に必要な程度以上に詳しく述べられている．

3.11. 任意の付値に対して，

$$\Delta,\ \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

の真理値と

$$\Delta,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

の真理値とは一致する．したがって，一方の sequent が tautology となる必要十分条件は他方が tautology となることである．

3.12. 任意の付値に対して，

$$\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \Lambda$$

の真理値と

$$\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \Lambda$$

の真理値とは一致する．したがって，一方の sequent が tautology となる必要十分条件は他方が tautology となることである．

3.13. 任意の付値を一つ固定した場合，

$$\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B},\ \Lambda$$

の真理値が V となる必要十分条件は

$$\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A},\ \Lambda \qquad \text{および} \qquad \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{B},\ \Lambda$$

という二つの sequent の真理値がいずれも V となることである．したがって，最初の sequent が tautology である必要十分条件は，あとの二

つの sequent がともに tautology となることである.

3.14. 任意の付値を一つ固定した場合,

$$\varDelta,\ \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

の真理値が V となる必要十分条件は

$$\varDelta,\ \mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta \quad \text{および} \quad \varDelta,\ \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

という二つの sequent の真理値がいずれも V となることである. したがって, 最初の sequent が tautology である必要十分条件は, あとの二つの sequent がともに tautology となることである.

3.15. 任意の付値に対して

$$\varDelta,\ \neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta$$

の真理値と

$$\varDelta,\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}$$

の真理値とは一致する. したがって, 一方の sequent が tautology である必要十分条件は他方が tautology となることである.

3.16. 任意の付値に対して,

$$\Gamma \to \Theta,\ \neg\mathfrak{A},\ \Lambda$$

の真理値と

$$\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta,\ \Lambda$$

の真理値とは一致する. したがって, 一方の sequent が tautology である必要十分条件は他方が tautology となることである.

3.17. 任意の付値を一つ固定した場合

$$\varDelta,\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

の真理値が V となる必要十分条件は,

$$\varDelta,\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \quad \text{および} \quad \varDelta,\ \mathfrak{B},\ \Gamma \to \Theta$$

という二つの sequent の真理値がいずれも V となることである. したがって, 最初の sequent が tautology である必要十分条件は, あとの二つの sequent がともに tautology となることである.

3.18. 任意の付値に対して,

$$\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \Lambda$$

の真理値と

$$\mathfrak{A},\ \Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{B},\ \Lambda$$

の真理値とは一致する. したがって, 一方の sequent が tautology であ

る必要十分条件は他方が tautology となることである.

3.2. さて，与えられた sequent が tautology であるかどうかを判定するという問題は，3.11—3.18 によれば，より簡単な sequent に対する同種の問題に還元される．より簡単な sequent とは，そこに含まれる論理記号の個数 —— 同じ論理記号が何回も現われれば，その回数だけ数えることにして，その合計を**次数**とよぶ —— がもとの sequent より少ない，ということである．そして，そのことを何度も繰り返せば，最後には，つぎの問題に帰着されてしまう：

> 論理記号を一つも含まない —— すなわち 次数 0 の —— sequent が与えられたとき，その sequent が tautology であるかどうかを判定すること．

次数 0 の sequent を

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{B}_\nu$$

とすれば，これは論理記号を一つも含まないのだから，$\mathfrak{A}_1$, …, $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_1$, …, $\mathfrak{B}_\nu$ はすべて命題変数である．

1) この左辺と右辺に共通の命題変数があれば，この sequent は tautology である．

何となれば，一つの付値を与えた場合，左辺・右辺に共通の命題変数の真理値が V であっても 人 であっても，この sequent の真理値は V となるからである．

2) 左辺と右辺に共通の命題変数がなければ，この sequent は tautology ではない．

何となれば，左辺に現われる命題変数の真理値をすべて V，右辺に現われる命題変数の真理値をすべて 人，その他の命題変数の真理値を任意に定義することによって得られる付値に対して，この sequent の真理値は 人 となるからである．

3.3. 次数 0 の sequent に対しては，われわれの目的とする定理は自明である：

> 次数 0 の sequent が tautology ならば，それは証明可能である．

何となれば，それは，左辺・右辺に共通な論理式——じつは命題変数——をもつからである．

例 $A,\ B,\ C \rightarrow B,\ A$ は，たとえば，つぎのようにして証明可能で

ある：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{B \to B, A}}{C, B \to B, A}}{B, C \to B, A}}{A, B, C \to B, A}$$

3.4. 最後に，一般の次数をもつ sequent に対して，つぎの LK に関する**完全性定理**（completeness theorem）を証明する：

完全性定理 任意の tautology は LK で証明可能である．

証明は，与えられた tautology —— それは sequent —— の次数 γ に関する数学的帰納法による．

3.41. $\gamma=0$ の場合：それは，すでに 3.3 で述べたとおりである．

3.42. $\gamma>0$ の場合．次数が γ より小さい tautology がすべて LK で証明可能であると仮定して（帰納法の仮定），与えられた tautology が証明可明であることを示す：

$\gamma>0$ であるから，与えられた tautology は少なくとも一つの論理記号を含む．したがって，3.11—3.18 のいずれかによって，必ず γ より次数の小さい［1個または2個］の tautology をつくることができる．さて，帰納法の仮定によれば，こうしてつくられた次数が γ より小さい tautology は［二つあれば，二つとも］LK で証明可能である．あとは，この γ より小さい次数をもつ tautology の証明可能性を用いて，与えられた tautology の証明可能性を証明すればよい．

3.421. 与えられた tautology から 3.11 で述べた方法によって γ より次数の小さい tautology をつくった場合：

与えられた tautology が $\Delta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta$ であり，γ より次数の小さい tautology $\Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta$ は LK で証明可能であるとする．しからば，つぎのようにして，与えられた tautology も証明可能であることがわかる：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Theta}}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Theta}\ \wedge\text{-左}}{\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Theta}}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Theta}\ \wedge\text{-左}}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Delta, \Gamma \to \Theta}}{\Delta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$$

3.422. 与えられた tautology から 3.12 で述べた方法によって γ より次数の小さい tautology をつくった場合：

証明は，3.421 と双対的に行なうことができる．

3.423. その他の場合はすべて，ほとんど明らかである．3.13 の場合には，構造に関する推論図を補助的に用いることによって，$\wedge$-右 を 1 回用いればよいし，3.14，3.15，3.16，3.17，3.18 の場合には，それぞれ，$\vee$-左，$\neg$-左，$\neg$-右，$\supset$-左，$\supset$-右 を 1 回ずつ用いればよいのである．

これで，*LK* の完全性の証明は終わった．そして，古典論理の命題計算はすべて *LK* と同等であるのだから——というより，同等でなければならないのだから，以上によって，これらの体系の完全性の証明もすべて終了したことになる．

4. *LK* の完全性に対する上記の証明に関連して，〈*LK* の決定問題〉ならびに〈Gentzen の基本定理〉なるものに関する注意を与えておく．

4.1. ***LK* の決定問題** まえにも注意しておいたように，3.11—3.18 および 3.2 に述べた事項は，そのまま，命題論理の決定問題の一つの**決定手続き** (decision procedure) を与えるものである．のみならず，その〈手続き〉が *LK* の決定問題の解法を与えていることを，tautology の概念を用いることなく，証明可能性の概念のみによって，直接に証明することも容易である．その細目は，読者の研究用として残しておく．

4.2. **Gentzen の基本定理** 3.4 における完全性定理の証明を見なおせば容易にわかることであるが，そこでは，*LK* の推論規則のすべてが用いられているわけではなく，実は，cut という推論規則は不必要なのである．いま，*LK* から cut という推論規則を除いて得られる命題計算の体系を，かりに *S* と名づければ，3.4 で証明されたのは，*LK* というよりは，むしろ *S* の完全性なのである．

上記の体系 *S* において証明可能であることを，〈*LK* において **cut なしで**証明可能〉ということにすれば，*LK* の完全性定理は，つぎのように精密化される：

任意の tautology は，*LK* において cut なしで証明可能である．

これによって，つぎに述べる *LK* に関する Gentzen の基本定理が容

易に示される：

LK の基本定理 LK において証明可能な sequent は，LK において cut なしで証明可能である．

証明 $\mathfrak{S}$ という sequent が LK で証明可能ならば，$\mathfrak{S}$ は tautology である．よって，$\mathfrak{S}$ は LK において cut なしで証明可能である（証明終わり）．

4.21．LK の基本定理とは，述語論理に関する定理として，Gentzen がより一般的な形式において証明したものであって，ここに述べたのは，それを命題論理の場合に特殊化したものである．

4.22．基本定理を成立させるためには，LK の公理や推論規則を §9 の 2.12 に述べたままの形にしておかなければならない．[1] たとえば，$\wedge$-右 を〈推論規則〉としてではなく，

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$$

という〈公理〉の形になおしても，体系としては LK と同等ではあるが，もはや基本定理は，そのままの形では成立しなくなる．

4.23．基本定理は，あくまでも〈命題計算〉としての LK における〈証明可能性〉についての定理である．であるから，§8 の **5** におけるような，一般の〈命題論理〉の公理系として LK を採用する場合，そこから cut を除いておくわけにはいかない．もし cut を除いておけば，一般的には，それは命題論理にはならない．

4.24．**LJ の基本定理** LJ についても，LK の基本定理と同様な定理が成立する．しかし，上に述べた LK の基本定理の証明と同様な方法では証明しえない．LJ の基本定理を証明するためには，いまのところ，Gentzen の採用したような，より直接的な証明方法によらなければならないのである．

また，LJ の基本定理を用いれば，**LJ の決定問題**——直観主義論理の命題計算の決定問題——の解法も得られるのであるが，記号論理の入門書たる本書の程度をこえるものとして，これらのことについては，これ以上に深入りはしないことにする．

1）もちろん，基本定理の成立する範囲での，ある程度の変形は可能である．

II. 述　語　論　理

§1. 命　題　関　数

命題論理においては，命題の真偽や相互関係にのみ着目し，各命題の内容にまでは立ち入らなかった．たとえば，〈2は偶数である〉という命題も〈7は素数である〉という命題も，単に真な命題であるとして，その間に何の区別をも考えないという立場であったのである．これに反して，**述語論理** (predicate logic) においては，命題論理のとき以上に，さらに命題の内部構造に立ち入って考察をすすめようとする．そこで，まず第一に，この§においては，命題として〈真偽の定まっている命題〉のみを考えるという立場に立って，述語論理に現われる諸概念の semantic な意味づけをしておく．

0.　述語論理においては，二つの集合が基礎となっている．その第一は，真な命題 $\curlyvee$ と偽な命題 $\curlywedge$ を二つの元とする集合 $\boldsymbol{L}_0$ である：

$$\boldsymbol{L}_0=\{\curlyvee,\ \curlywedge\}.$$

そして，その第二は，任意に与えられた**空でない**集合 $\boldsymbol{D}$ である．

$\boldsymbol{L}_0$ においては，第 I 編で述べた意味での演算 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$ が定義されており，$\vee$, $\wedge$, $\neg$ に関して Boole 束となっている．また，関係 $A\to B$ を $A\supset B=\curlyvee$ によって定義すれば，$\to$ は $\boldsymbol{L}_0$ における一つの順序を与え，しかも，それは Boole 束としての $\boldsymbol{L}_0$ における順序と一致する．$\curlyvee$ および $\curlywedge$ は，その順序によって，それぞれ $\boldsymbol{L}_0$ の最大元および最小元である．

空でない集合 $\boldsymbol{D}$ は任意ではあるが，以下それを一つ固定して考え，**対象領域** (object domain, individual domain) とよぶ．対象領域のおのおのの元を**対象** (object, individual) という．

1.　$\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{L}_0$ への一意写像を**命題関数** (propositional function) とよぶ．対象領域 $\boldsymbol{D}$ を定義域とする一価関数で，関数値が $\curlyvee$ または $\curlywedge$ となるもののことである．

例 1. 対象領域 $\boldsymbol{D}$ が自然数の全体（$=\{1,2,3,\cdots\}$）である場合，

$$F(x)=\begin{cases} \curlyvee & (x \text{ が偶数}) \\ \curlywedge & (x \text{ が奇数}) \end{cases}$$

として定義された F は一つの命題関数である．a を任意の自然数（すなわち：$a\in\boldsymbol{D}$）とすれば，$F(a)$ は〈a は偶数である〉という内容をもつ命題を，$\neg F(a)$ は〈a は偶数でない〉，言いかえれば〈a は奇数である〉という内容をもつ命題を表わしている．

一般に，F を任意の命題関数，a を任意の対象とするとするとき，$F(a)$ を〈a は F である〉と読む．その意味で，命題関数のことを**述語**（predicate）という．あるいは，おのおのの命題関数を，それぞれ一つの**概念**（concept）を表わすものと考えることもできる．

述語のことを**性質**（property）または**条件**（condition）とよぶこともある．その場合に応じて，$F(a)$ を〈a は性質 F をもつ〉とか〈a は条件 F を満たす〉と読むのである．さらには，F を

$$\{a\ ;\ F(a)=\curlyvee\}$$

という**集合**を代表するものと考え，$F(a)$ を〈a は F に属す〉と読むこともある．

伝統的な論理学においては，〈性質〉のことを**内包**（intension），〈集合〉のことを**外延**（extension）とよび，同一の〈概念〉の異なった2面を表わすものと考える．しかし，上記のように割り切って考えてしまえば，それらはまったく名称の相違にすぎなくなってしまうのである．

F という述語から，

$$H(x)=\neg F(x)$$

によって，H という述語をつくることができる．同様に，F，G という述語が与えられれば，それらから

$$F(x)\wedge G(x),\quad F(x)\vee G(x),\quad F(x)\supset G(x)$$

という述語をつくることもできる．

例 2. F が〈…は偶数である〉，G が〈…は素数である〉という述語ならば，

$$H(x)=\neg F(x)\wedge G(x)$$

によって定義される述語 H は〈…は奇素数である〉ということを表わしている．

例 3. F とか G とかいう述語を，対象領域 $\boldsymbol{D}$ の部分集合を表わすと考えるならば，

$$F(x) \vee G(x),\ F(x) \wedge G(x),\ \neg F(x)$$

という述語は，それぞれ，F と G の和集合・共通部分，および，F の $\boldsymbol{D}$ に関する補集合に対応している．

2. 以上では **1 変数の命題関数** (propositional function of one variable) すなわち **1 変数の述語** (predicate of one variable) についてのみ述べたけれども，普通の関数の場合と同様に，$\boldsymbol{n}$ **変数の述語** (predicate of n variables) すなわち $\boldsymbol{n}$ **変数の命題関数** (propositional function of n variables) というものも一般に考えることができる．

2変数の述語のことを **2 項関係** (binary relation) あるいは単に**関係** (relation) とよぶ．

例 4. $$F(x, y)=\begin{cases} \curlyvee & (x=y) \\ 人 & (x \neq y) \end{cases}$$

として定義される2変数の述語 F は，対象領域 $\boldsymbol{D}$ における＝という関係を表わしている．F を関係とよぶときは，それは〈論理的〉な意味であり，＝を関係とよぶときは，それは〈超論理的〉な意味である．その相違は，論理的な命題［$\curlyvee$ および 人］と超論理的な命題の相違に対応している．

例 5. 対象領域 $\boldsymbol{D}$ を順序集合とするとき，

$$F(x, y)=\begin{cases} \curlyvee & (x \leq y) \\ 人 & (x \not\leq y) \end{cases}$$

として定義される F は，$\boldsymbol{D}$ における順序関係 $\leq$ を表わす［命題関数としての］関係である．

例 6. 対象領域の元がすべて集合であるとき，

$$F(x, y)=\begin{cases} \curlyvee & (x \in y) \\ 人 & (x \notin y) \end{cases}$$

として定義される関係 F が，いわゆる $\in$-関係である．

R が2項関係であるとき，$R(a, b)$ のことを aRb と表わす，という記法は多く用いられている．

一般に，n 変数の述語のことを $\boldsymbol{n}$ **項関係** (n-ary relation) という．

3. **Quantifier** 述語 $F(x)$ からつくられる命題で，〈**すべての**対象 x に対して $F(x)$ が成立する〉という内容に相当するものを

$$\forall x F(x)$$

という記号で，〈$F(x)$ を満たす対象 x が**存在する**〉という内容に相当するものを

$$\exists x F(x)$$

という記号で表わす．とくに〈存在する〉という場合には，数学においては通常〈**少なくとも一つ**存在する〉という意味であって，〈**ただ一つ**存在する〉ということではない．

$\forall x$ および $\exists x$ は，x を独立変数とする 1 変数の述語に，それぞれ一つずつの命題［$\vee$ または $\wedge$］を対応させる作用素（operator）で **quantifier**（**限定作用素**）とよばれる．とくに $\forall x$ を**全称作用素**（universal quantifier），$\exists x$ を**存在作用素**（existential quantifier）といい，quantifier を表わすのに用いる論理記号 $\forall$ を**全称記号**（Allzeichen），$\exists$ を**存在記号**（Existenzzeichen）という．

Quantifier の定義をはっきり述べれば，つぎのようになる：

3.1. **全称作用素** 1 変数の述語 $F(x)$ において，$F(x)$ の値が恒等的に $\vee$ であれば，$\forall x F(x)$ は $\vee$ を表わし，それ以外の場合はすべて，$\forall x F(x)$ は $\wedge$ を表わす．

3.2. **存在作用素** 1 変数の述語 $F(x)$ において，$F(x)$ の値が恒等的に $\wedge$ であれば，$\exists x F(x)$ は $\wedge$ を表わし，それ以外の場合はすべて，$\exists x F(x)$ は $\vee$ を表わす．

この 3.1 と 3.2 を見較べればすぐにわかるように，$\vee$ と $\wedge$ を入れかえれば，$\forall$ の定義から $\exists$ の定義が（および，その逆が）得られる．すなわち，$\forall$ と $\exists$ とは，互いに他の双対概念となっている．

3.3. 二つの quantifier はいずれも，1 変数の述語に命題を対応させるものであるが，2 変数以上の述語に対しても作用させることができる．たとえば，2 変数の述語 $F(x,y)$ に $\forall x$ あるいは $\exists x$ を作用させるには，y を parameter と考えればよい．

詳しく述べれば： 2 変数の述語 $F(x,y)$ が与えられたとする．さらに，任意の対象 a を一つ固定すれば，$F(x,a)$ は［x を独立変数とする］1 変数の述語である．したがって，任意の対象 a に

対して $\forall x F(x, a)$ という命題が定まる．このようにして得られる命題 $\forall x F(x, a)$ を a に対応させる1変数の述語を［x と異なる変数 y を独立変数として用い］

$$\forall x F(x, y)$$

と書くのである．

$$\exists x F(x, y)$$

についても，まったく同様である．

3.4.　**自由変数と束縛変数**　2変数 x, y の述語 $F(x, y)$ からつくられる

$$\forall x F(x, y) \quad \text{および} \quad \exists x F(x, y)$$

は，いずれも1変数 y の述語であって，変数 x には何の関係もない．すなわち，これらの表現における変数 x は，命題なり述語なりを表現するために便宜上用いられている**見かけ上の変数** (apparent variable) であり，**本当の変数** (true variable) は y のみである．それは，ちょうど

$$\int_0^1 f(x, y)\,dx$$

の x, y とまったく同様な関係にある．このような見かけ上の変数を**束縛変数** (bound variable) といい，それと区別するために，本当の変数を**自由変数** (free variable) とよぶ．

例 7. $\forall x F(x, y)$ は1変数 y の述語である．それを $G(y)$ とすれば，$\forall y G(y)$ および $\exists y G(y)$ は命題である．これらの命題を，それぞれ

$$\forall y \forall x F(x, y) \quad \text{および} \quad \exists y \forall x F(x, y)$$

と表わす．

問　$\forall y \exists x F(x, y)$ および $\exists y \exists x F(x, y)$ の定義を述べよ．

例 8. $F(x, y, z)$ を3変数 x, y, z の述語とするとき，

$$\forall x F(x, y, z)$$

における x は束縛変数で，y と z が自由変数．そして，これは2変数 y, z の述語である．また，

$$\exists z \forall x F(x, y, z)$$

においては，x と z が束縛変数で自由変数は y のみであるから，これは1変数 y の述語である．

3.5.　〈定数〉と〈定数値関数〉とは異なった概念であるが，定数を

定数値関数として流用する場合が多い．それと同じ考えで，命題というものを〈定数値命題関数〉としても用いる．すなわち，A という命題［$\curlyvee$ あるいは 人］を，恒等的に A という関数値をもつ述語を表わす記号としても用いるのである．そうすれば，$\forall xA$ および $\exists xA$ という命題を考えることもでき，それらはいずれも A に等しい：

$$\forall xA=\exists xA=A.$$

証明 恒等的に $F(x)=A$ という述語 $F(x)$ を考え，

$$\forall xF(x) \quad \text{および} \quad \exists xF(x)$$

のことを，それぞれ，$\forall xA$ および $\exists xA$ と書くのである．

1) $A=\curlyvee$ の場合：

3.1 によれば，　$\forall xA=\curlyvee$；

3.2 によれば，　$\exists xA=\curlyvee$．

ゆえに，

$$\forall xA=\exists xA=A.$$

2) $A=$人 の場合：

3.1 によれば，　$\forall xA=$人；

3.2 によれば，　$\exists xA=$人．

ゆえに，

$$\forall xA=\exists xA=A.$$

以上の 1)，2) で証明は終わった．

例 9．2変数 x, y の述語 $F(x,y)$ を3変数 x, y, z の述語と考えることもできる．そう考えれば：

$$\forall zF(x,y)=\exists zF(x,y)=F(x,y).$$

4. 集合 $\boldsymbol{L}_0=\{\curlyvee, \text{人}\}$ は関係 → を順序としての Boole 束である．ここで，

$$A\rightarrow B$$

という関係は，$A=\curlyvee$，$B=$人 のときにのみ成立せず，それ以外の場合には成立するものとして定義されている．すなわち，$\curlyvee$ と 人 とは異なり，しかも $\curlyvee$ が最大元，人 が最小元となる Boole 束である．

4.1. F を1変数の述語とする．すなわち，対象領域 $\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{L}_0$ への任意の一意写像を F とする．しからば，任意の対象 a，すなわち，

$\boldsymbol{D}$ の任意の元 a に対して $F(a)$ は命題を表わす： $F(a) \in \boldsymbol{L}_0$.

このとき，つぎの 1)，2) が成立する：

1) 任意の対象 a に対して，

$$\forall x F(x) \to F(a).$$

2) 任意の対象 a に対して

$$A \to F(a)$$

となれば，

$$A \to \forall x F(x).$$

ここで，A は任意の命題である ($A \in \boldsymbol{L}_0$).

4.11. 1) **の証明** F の値が恒等的に $\curlyvee$ であれば，

$$F(a) = \curlyvee.$$

それ以外の場合には，

$$\forall x F(x) = 人.$$

いずれにしても

$$\forall x F(x) \to F(a).$$

4.12. 2) **の証明** $A=$人 の場合には，当然

$$A \to \forall x F(x)$$

は成立する．$A = \curlyvee$ の場合には

$$A \to F(a)$$

ということから

$$F(a) = \curlyvee.$$

ここで，a は任意の対象であるから，この場合には，F の値は恒等的に $\curlyvee$ で，

$$\forall x F(x) = \curlyvee$$

となり，

$$A \to \forall x F(x).$$

4.13. この 1)，2) は $\forall x F(x)$ を特徴づける性質である．すなわち，$\forall x F(x)$ というのは，任意の対象 a に対して

$$A \to F(a)$$

となる命題 A の最大のものである．

任意の対象 a に対して $A \to F(a)$ となるということを

(*) $\quad A \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$

と表わすことにすれば，1) と 2) は，それぞれ，つぎのように書くことができる：

1) $\forall x F(x) \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$.

2) $A \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$ ならば $A \to \forall x F(x)$.

この 1) は，$\forall x F(x)$ が (*) という条件を満たす命題 A の一つであることを示しているし，2) は，$\forall x F(x)$ がそのような A のどれよりも大きい，ということを示している．

4.2. $\exists x F(x)$ もまた，$\forall x F(x)$ に対するのと双対的に，つぎの 1)，2) によって特徴づけられる：

1) $F(a) \to \exists x F(x) \quad (a \in \boldsymbol{D})$.

2) $F(a) \to A \quad (a \in \boldsymbol{D})$ ならば $\exists x F(x) \to A$.

すなわち，$\exists x F(x)$ は

$$F(a) \to A \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

となる A の最小のものである．

この証明もまた，4.11，4.12 における証明とまったく双対的に行なうことができる．

4.3. 上に述べたことを束論的に表現するならば，

$$\forall x F(x) = \inf\{F(a)\,;\, a \in \boldsymbol{D}\},$$
$$\exists x F(x) = \sup\{F(a)\,;\, a \in \boldsymbol{D}\}$$

ということになる．したがって，対象領域 $\boldsymbol{D}$ が有限集合

$$\boldsymbol{D} = \{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$$

である場合には

$$\forall x F(x) = F(a_1) \wedge F(a_2) \wedge \cdots \wedge F(a_n),$$
$$\exists x F(x) = F(a_1) \vee F(a_2) \vee \cdots \vee F(a_n)$$

である．

例 10. $\forall x(F(x) \wedge G(x)) = \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$

証明 $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$ が

$$A \to F(a) \wedge G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

という A の最大のものであることを示せばよい．それは，つぎの 1)，2) を示すことである：

1) $\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \to F(a) \wedge G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$.

2) $A \to F(a) \wedge G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$ ならば

$$A \to \forall x F(x) \wedge \forall x G(x).$$

1) の証明：

$$\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \to \forall x F(x) \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

$$\forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \to \forall x G(x) \to G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

$$\therefore \quad \forall x F(x) \wedge \forall x G(x) \to F(a) \wedge G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

2) の証明：

$$A \to F(a) \wedge G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$$

と仮定すれば，

$$A \to F(a), \quad A \to G(a) \quad (a \in \boldsymbol{D}).$$

$$\therefore \quad A \to \forall x F(x), \quad A \to \forall x G(x)$$

$$\therefore \quad A \to \forall x F(x) \wedge \forall x G(x)$$

注意　$\forall x F(x) = \inf\{F(a)\ ;\ a \in \boldsymbol{D}\}$,

$\forall x G(x) = \inf\{G(a)\ ;\ a \in \boldsymbol{D}\}$

ということに注意すれば，例 10 の等式を一種の**結合律**と考えることができる．これと双対的に

$$\exists x(F(x) \vee G(x)) = \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$$

という結合律も成立する．

練 習 問 題

1.　命題を表わす式のなかで束縛変数として用いられている文字を替えても，それの表わす命題に変化はない．すなわち：

$$\forall x F(x) = \forall y F(y), \quad \exists x F(x) = \exists y F(y).$$

このことを，本文の 4.1 および 4.2 で述べた $\forall$ および $\exists$ の性質をもとにして証明せよ．

2.　$\forall x F(x) \to \exists x F(x)$.

3.　対象領域がただ一つの対象しか含まない場合には，

$$\exists x F(x) \to \forall x F(x).$$

しかし，この関係は，一般には成立しない．この関係の成立しない例をあげよ．

4.　$\forall x \forall y F(x, y) = \forall y \forall x F(x, y)$,

$\exists x \exists y F(x, y) = \exists y \exists x F(x, y)$.

すなわち，ひき続いて現われる同種類の quantifier の順序を交換しても

命題に変化はない．

5. $$\exists y \forall x F(x, y) \rightarrow \forall x \exists y F(x, y)$$

はつねに成立するが，逆の

$$\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists y \forall x F(x, y)$$

は一般には成立しない．前者を証明し，後者の成立しない例をあげよ．

6. 1) $A \wedge \forall x F(x) = \forall x(A \wedge F(x))$

2) $A \vee \forall x F(x) = \forall x(A \vee F(x))$

3) $A \vee \exists x F(x) = \exists x(A \vee F(x))$

4) $A \wedge \exists x F(x) = \exists x(A \wedge F(x))$

7. **De Morgan の法則**

$$\neg \forall x F(x) = \exists x \neg F(x)$$

$$\neg \exists x F(x) = \forall x \neg F(x)$$

8. 1) $A \supset \forall x F(x) = \forall x(A \supset F(x))$

2) $A \supset \exists x F(x) = \exists x(A \supset F(x))$

3) $\forall x F(x) \supset A = \exists x(F(x) \supset A)$

4) $\exists x F(x) \supset A = \forall x(F(x) \supset A)$

注意 6, 7, 8 における左辺のような形をその右辺に書き替えるという操作をできる限り繰り返し適用すると，いかなる命題の表現も，すべての quantifier が初めに並ぶような表現になおされてしまう．ただし，そのとき，必要とあらば，束縛変数として用いられている文字を変更してもよく，また，操作の途中で，$\wedge$ や $\vee$ に関する交換律は自由に用いるものとする．このようにして得られた命題の表現を **prenex normal form** という．

9. 1) $\forall x(F(x) \supset G(x)) \rightarrow \forall x F(x) \supset \forall x G(x)$

2) $\forall x(F(x) \supset G(x)) \rightarrow \exists x F(x) \supset \exists x G(x)$

10. $$\exists x(F(x) \supset G(x)) = \forall x F(x) \supset \exists x G(x)$$

§2. 超限的命題

命題というものは真（⋎）および偽（人）の二つしかないとはいえ，命題の表現は千差万別である．のみならず，われわれに与えられるものは命題そのものではない．われわれの遭遇するところのものは，つねに命題の各種の表現である．そして，それらの表現が，果たして真偽いずれの命題を表わしているかということを判別することが，われわれに与えられる多くの問題の一般形式である．

たとえば，**Fermat の問題**というのは，

$$\forall n\forall x\forall y\forall z[n>2\supset\neg(x^n+y^n=z^n)]$$ [1)]

という表現が，⋎ を表わすか，または 人 を表わすか，ということを決定せよ，というのである．上の表現は，⋎ および 人 のいずれか一方のみを表わしているに違いない．ただ，そのいずれであるかということが，現在のわれわれの知識の範囲外に属しているにすぎないのである．

このような次第であるから，われわれが通常〈命題〉とよんでいるものは，多くの場合，§1 でいうところの命題ではなく，むしろ命題の表現なのである．そこで，われわれも普通の用語法にしたがい，命題の表現そのもののことを単に〈命題〉とよぶことにしよう．このように考えるならば，命題というものはただ二つだけというのではなく，数多く存在することとなる．しかし，それらの数多くの命題は，〈真〉とよばれる一群の命題と，〈偽〉とよばれる一群の命題の 2 種類に分類されている〔そして，このことが，**排中律**とよばれているものの実質的な内容である〕．しかし，その分類を，われわれは完全に知りつくしてはいない．一般的にいえば，われわれの知りうるのは，単に，その一小部分にすぎないので，その真相は，地平線のはるか彼方に完全にかくされてしまっているのである．

1. 命題の表現そのものを単に〈命題〉とよぶことにしたが，それら

1）ここでは，対象領域として自然数の全体からなる集合を考えている．そして，〈$n>2$〉は 1 変数 n の，〈$x^n+y^n=z^n$〉は 4 変数 x，y，z，n の述語を表わしている．それらの命題関数をどのように定義するかということは，ここで説明するまでもないことであろう．

多くの命題のうち，述語論理において特に問題となるのは quantifier を含む命題である．いい替えれば，それは ∀ および ∃ という論理記号の一方あるいは両方を含む命題であって，そのような命題をわれわれは**超限的命題**（transfinite Aussage）とよぶ．超限的命題のうち最も基本的なものは

$$\forall x F(x) \quad \text{および} \quad \exists x F(x)$$

という形式をもつ命題である．そして，述語論理の主たる目的は，このような命題の研究であるといってよい．

$\forall x F(x)$ および $\exists x F(x)$ という形の超限的命題を特徴づける性質として，われわれは § 1 において（4.1，4.2）つぎの事実を認めた：

∀ に関する基本性質

∀-左：　$\forall x F(x) \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$.

∀-右：　$A \to F(a) \quad (a \in \boldsymbol{D})$ ならば $A \to \forall x F(x)$.

∃ に関する基本性質

∃-右：　$F(a) \to \exists x F(x) \quad (a \in \boldsymbol{D})$.

∃-左：　$F(a) \to A \quad (a \in \boldsymbol{D})$ ならば $\exists x F(x) \to A$.

以上において，$\boldsymbol{D}$ は対象領域を意味する．

1.1.　まず第一に，これらの基本性質が数学的証明のなかでどのように用いられるかということを，自然数の全体を対象領域 $\boldsymbol{D}$ とした場合（$\boldsymbol{D}=\{1, 2, 3, \cdots\}$）についての簡単な例によって示そうと思う．

1.11. その例とは

$$\forall x(x < x+1) \to \forall x \exists y(x < y)$$

の証明である．

まず，a を任意の自然数（$a \in \boldsymbol{D}$）とすれば，∀-左によって，

（1）　$\forall x(x < x+1) \to a < a+1$.

a が自然数であるから，$a+1$ も自然数（$a+1 \in \boldsymbol{D}$）．よって，∃-右によれば，

（2）　$a < a+1 \to \exists y(a < y)$.

ゆえに，（1）と（2）から

（3）　$\forall x(x < x+1) \to \exists y(a < y)$.

ここで，a は任意の自然数であった．よって，∀-右によれば，

（4）　$\forall x(x < x+1) \to \forall x \exists y(x < y)$.

これで，証明は終わった．

1.12. 以上の証明を図式的に示せば，つぎのようになる：

$$
\cfrac{\overset{(\forall\text{-左})}{\forall x(x<x+1)\to a<a+1} \qquad \overset{(\exists\text{-右})}{a<a+1\to\exists y(a<y)}}{\cfrac{(3)\cdots\ \forall x(x<x+1)\to\exists y(a<y)}{(4)\cdots\ \forall x(x<x+1)\to\forall x\exists y(x<y)}\ \forall\text{-右.}}\ \text{cut}
$$

1.13. ここで証明された（４）は

$$A\to\forall xF(x)$$

という形式をもつ．A は $\forall x(x<x+1)$ という命題であって，$F(x)$ は $\exists y(x<y)$ を意味する．そうすれば，（３）は

$$A\to F(a)$$

と表わされ，（３）より（４）へ移る推論〈∀-右〉は

$$\frac{A\to F(a)}{A\to\forall xF(x)}$$

ということになる．この ∀-右 という推論は，実質的に何を意味するのであろうか？

上に述べた証明の（３）にいたるまでの部分において，a は**任意の**自然数であった．そこでは a は１でもよく，２でもよく，また３でもよい．a として自然数１を採用したり，また２や３を用いることによって，それぞれ

$$A\to F(1)\qquad A\to F(2)\qquad A\to F(3)$$

の証明が得られる．しかし，このうちのどの一つを証明したとしても，その一つだけでは

$$A\to\forall xF(x)$$

の証明とはならず，これを証明するためには，是非とも

$$A\to F(1)\qquad A\to F(2)\qquad A\to F(3)\qquad \cdots\cdots$$

の**すべて**を証明しなければならない．すなわち，**任意の**自然数 a に対して

$$A\to F(a)$$

が証明されなければならぬのである．要するに，1.11 または 1.12 に述べた証明のうちの（３）にいたるまでの部分は，この**無限に多くの**証明の一般的形式を述べたものであり，a という〈変数〉を利用すること

によって，それを**有限的に**表現したものである.[1]

一般的に述べれば，科学の求める有意義な結論の多くは，個々の事象の個別的な記述ではなく，無限に多くの事象を総括する一般的な記述である．それは，$\forall xF(x)$ という形の全称命題によって表わされる．数学もまた，その例外ではない．

$\forall xF(x)$ という形の命題は，その対象領域が無限集合である限り，無限に多くの対象に関する記述となっている．無限に多くの対象を問題とする以上，われわれは，無限に長い証明というものをも想定しなければならない．無限に長い証明というものを，われわれは空想することはできる．しかし，そのような証明を，われわれは述べつくすことはできない．われわれの記述しうるものはつねに有限のものである．してみれば，〈変数〉というものを利用することによって無限に多くの内容を有限的に記述するという，現代のわれわれにとっては日常茶飯のこととなっているこの方法も，まことに巧妙なる発明といわなければならぬであろう．

とにかく，1.11 あるいは 1.12 の証明における a は，無限に長い証明というものを許さぬ限り，個々の自然数であってはならない．それは，任意の自然数を表わす〈変数〉である．

1.2.　このような問題は $\forall$-右 という推論にのみあるわけではない．〈$\exists$-左〉においてもまったく同様な問題が生じる．そのことは，〈$\forall$ および $\exists$ に関する基本性質〉を列記したときの $\exists$-左 の記述を見れば明らかであろう．しかし，念のために，再び簡単な例をあげて説明をしておく．

1.21.　まず，

$$\exists y\forall xF(x, y) \to \forall x\exists y(x, y)$$

の証明を，数学において通常用いられているような順序で述べてみる．それには，$\exists y\forall xF(x, y)$ を真であると仮定して，$\forall x\exists yF(x, y)$ が真であることを導けばよい〔詳しくいえば，$\exists y\forall xF(x, y)$ が偽のときは，証明すべきことが初めから明らかだからである〕.

$\exists y\forall xF(x, y)$ が真であるということから，$\forall xF(x, y)$ が真となるよ

1）普通には，このような a のことを，ただ単に〈文字〉とよんでいる．しかし，われわれは，その実質的な内容を考えて〈変数〉とよぶ.

うな対象 y が少なくとも一つ存在する．そのよなう対象 y の一つを b とする．しからば，

$$\forall x F(x,b)$$

は真である［b は，そのような対象であった］から，

$$\forall x F(x,b) \to \forall x \exists y F(x,y)$$

を証明すればよい．その証明は，つぎのとおりである：

$$\dfrac{\dfrac{\overset{(\forall\text{-左})}{\forall x F(x,b) \to F(a,b)} \qquad \overset{(\exists\text{-右})}{F(a,b) \to \exists y F(a,y)}}{\forall x F(x,b) \to \exists y F(a,y)}\,\text{cut}}{\forall x F(x,b) \to \forall x \exists y F(x,y)}\ \forall\text{-右}.$$

ここで，最後の推論 $\forall$-右 を可能にするために，a を〈任意の対象を表わす変数〉としておく．

これで証明は終わった．

1.22. この証明において，b は通常〈定数〉とよばれている．もし対象を自然数とすれば，b は或る一つの自然数である．それは 1 かもしれない．2 かもしれない．しかし，また，1 であるか 2 であるか 3 であるか，どんな自然数であるかわからないのが普通である．わかっていることは，一般には，

$$\forall x F(x,b)$$

が真であるということだけである．そのような b を，われわれは〈数字（＝具体的な自然数）〉をもって表わすことはできない．b はやはり〈文字〉で表わされていなければならない．さもないと，

もし，$b=1$ ならば，… ;
もし，$b=2$ ならば，… ;
もし，$b=3$ ならば，… ;
………

というように，無限に長い証明が必要となってくるからである．

1.23. b が〈文字〉である以上，それが〈定数〉とよばれていようと，何とよばれようと，実質的には，それは〈変数〉である．そのことは，1.21 の証明を，$\exists$-左 を用いて，つぎのように表わしてみれば，さらに明瞭となる：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\forall\text{-左})}{\forall xF(x,b)\to F(a,b)}\qquad \overset{(\exists\text{-右})}{F(a,b)\to\exists yF(a,y)}}{\forall xF(x,b)\to\exists yF(a,y)}\,\text{cut}}{\forall xF(x,b)\to\forall x\exists yF(x,y)}\,\forall\text{-右}}{\exists y\forall xF(x,y)\to\forall x\exists yF(x,y)}\,\exists\text{-左}.
$$

証明をこのように書きかえることによって，この証明に際しては，$\exists y\forall xF(x,y)$ を真と仮定する必要はなく，ここでは，$\exists y\forall xF(x,y)$ は真であっても偽であってもよい．したがって $\forall xF(x,b)$ も，真とも偽とも仮定されていないのである．b は**任意の**対象を代表する〈変数〉である．そして，この証明における最後の推論〈∃-左〉の内容を説明すれば，**任意の**対象 b に対して

$$\forall xF(x,b)\to\forall x\exists yF(x,y)$$

が成立するから

$$\exists y\forall xF(x,b)\to\forall x\exists yF(x,y)$$

も成立する，ということになる．

1.24. 対象領域を一つ確定し，その上で F という2変数の述語を具体的に与えれば，

$$\exists y\forall xF(x,y)\quad や\quad \forall x\exists yF(x,y)$$

は真偽の定まった命題を表わしている．ただ，その真偽をわれわれが知りうるや否やは別問題である．しかし，a や b が〈変数〉そのものであれば，一般には，

$$F(a,b),\quad \forall xF(x,b),\quad \exists yF(a,y)$$

等の真偽は原理的にも定まっていない．その真偽は，a や b の表わす対象の如何によって変化するのが普通のことだからである．それは，そのままでは，$\curlyvee$ および $\curlywedge$ のいずれをも表わしていないという意味で，これまで〈命題〉とよんできたものとは異なっている．にもかかわらず，われわれは通常，このように原理的にも真偽の定まっていない表現をも〈命題〉——**変数を含む命題**——とよんでいるのである．このことは，われわれに，これまで用いてきた命題概念の拡張の必要性を示唆している．

2. われわれは，命題というものが $\curlyvee$（真）および $\curlywedge$（偽）という二つしかないという考え方から出発した．§1 においては，この考えを

もとにして述語論理の大要を述べた．それは，いわゆる semantic な考察であり，後に述べようとする syntactical な方法の基盤となる考え方である．

しかし，数学的理論の現実においては，命題の表現そのものが命題と考えられている．のみならず，そこにおいては，超限的命題に関する議論を有限的に記述するために，任意の対象を代表する変数——**対象変数** (individual variable) ——なるものを利用し，さらに，そのような変数を含む命題の表現をも〈命題〉と考えるのである．

われわれは，つぎの § において，このような〈変数を含む命題〉をも含めての一般の〈命題の表現〉——それをわれわれは **論理式** とよぶ——というものをある程度はっきりと規定しようと思う．

§3. 数学的理論における命題の形式的表現

われわれがこれから定義しようとする〈論理式〉というものは，ある一つの数学的理論における種々の命題の形式的な表現である．われわれは，決して，あらゆる場合における命題の形式的表現のすべてを，個々の数学的理論に関係なく定義しようなどというのではない．もちろん，数学的理論としてはどのような理論が与えられてもよいが，論理式という概念は，あくまでも数学的理論を一つ固定したうえで，初めて定まるものなのである．

以後，**〈対象領域〉として空でない集合 $\boldsymbol{D}$ が，任意ではあるが，一つ固定されているもの**と考える．

1. Term 命題の形式的表現たる論理式の概念を定義するにさきだって，まず，対象（$=\boldsymbol{D}$ の元）の形式的表現を規定しておく．このような〈対象の形式的表現〉のことを term とよぶのである．

1.1. 以下にあげるものは，term の定義に必要な記号である．

1.11. **対象記号**（individual symbol） 個々の対象を表わす記号で，**対象定数**（individual constant）ともよばれる．要するに，一つの対象記号は，特定の一つの対象を表わしている．

1.12. **自由対象変数**（free individual variable） 任意の対象を代表する記号．

自由変数と束縛変数を区別する必要のあるのは，ここでは対象変数のみに限られるので，以下において単に**自由変数**といえば，それは自由対象変数のことであるということにしておく．

1.13. **関数記号**（function symbol） 対象領域 $\boldsymbol{D}$ から $\boldsymbol{D}$ 自身への個々の一価関数を表わす記号． ここで〈関数〉というのは，$\boldsymbol{D}$ 全体で定義されている関数を意味し，もちろん，多変数の関数も考えてはいるが，その独立変数の個数が有限のものにのみ限っている．

一つの関数記号は特定の一つの関数を表わしている．その意味で，関数記号のことを**関数定数**（function constant）とよぶこともある． また，一つの関数記号を与えれば，それの表わす関数が n 変数の関数である

という，その n という自然数も定まる．このとき，その関数記号は n **変数の関数記号**とよばれる．であるから，とくに対象記号というものを，0変数の関数記号として，関数記号の特別なものと考えて取り扱うこともできる．

対象領域を自然数の集合と考えた場合，a と b の和を表わす $a+b$ における＋や，階乗 $a!$ における！は，それぞれ，2変数および1変数の関数記号である．また，積 ab や累乗 a^b には特別な関数記号が使われてはいないけれども，これらをそれぞれ

$$\mathrm{prod}(a,b), \quad \exp(a,b)$$

などと表わすことにすれば，この prod や exp はともに2変数の関数記号となる．われわれは今後とも，実際には

$$a+b,\ a!,\ ab,\ a^b$$

などの記法を用いるが，**原理的には**，これらは

$$+(a,b), \quad !(a), \quad \mathrm{prod}(a,b),\ \exp(a,b)$$

と書かれ，関数記号 f は，つねに

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

の形式に用いらるべきものと考えておく．

1.2. **〈Term〉の定義**　これは帰納的な定義として，つぎのように述べられる：

1.21. 個々の対象記号は，それぞれ一つの term である．

1.22. 個々の自由変数も，それぞれ一つの term である．

1.23. f が n 変数の関数記号であるとき，もし

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$$

のおのおのがすべて term であるならば，

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

も term である．

1.24. 以上の 1.21—1.23 によって term であることがわかるものだけを term という．

1.3. たとえば，

$$(a+b)^2 \quad および \quad (a^2+b^2)+2(ab)$$

はともに term である．正しくは，これらはそれぞれ

$$\exp(+(a,b),\ 2)$$

および

$$+(+(\exp(a, 2), \exp(b, 2)), \mathrm{prod}(2, \mathrm{prod}(a, b)))$$

と書かれる．ここで，2は対象記号，a と b は自由変数で，+，prod，exp はすべて2変数の関数記号である．

自由変数 a, b が対象（いまの場合には，自然数）を代表していると考えると，この二つの term はつねに（すなわち，a と b がどんな対象を表わしていても）同一の対象を表わしている．いい替えれば，**semantical には** 上記の二つの term は同一の対象を表わしている．同一の対象の異なった表現である．しかし，term ということばは〈表現〉そのものを意味するものとして用いるのであるから，この二つの term は，term としては，やはり異なったものと考える．この意味で，term という概念は，それ自身としては，純粋に **syntactical な**概念である．そして，それを semantical に解釈するかどうかは，場合によりけりということになる．

2. 論理式

2.1. 論理式の定義に必要な記号で，term の定義に用いられなかったものをあげる．

2.11. **述語記号**（predicate symbol） 個々の述語を表わす記号．**述語定数**（predicate constant）ともよばれる．

n 変数の述語を表わす述語記号を **n 変数の述語記号**という（n=0, 1, 2, …）．命題を表わす記号 $\curlyvee$ および $\curlywedge$ は0変数の述語記号と考える．これは**命題記号**（proposition symbol）または**命題定数**（proposition constant）とよばれる．

2.12. **論理記号** $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

これらは**論理定数**（logical constant）ともよばれる．[1]

2.13. **束縛対象変数**（bound individual variable） 以後，単に**束縛変数**とよぶ．

束縛変数としては，便宜上，自由変数と異なった文字を用いることにしておく．

2.2. **〈論理式〉の定義**（帰納的定義）

2.21. F が n 変数の述語記号であるとき，もし

1）場合によっては，$\curlyvee$ および $\curlywedge$ をも**論理定数**とよぶことがある．

$$t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$$

のおのおのがすべて term ならば,

$$F(t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

は論理式である.

2.22. $\mathfrak{A}$ が論理式ならば $\neg\mathfrak{A}$ も論理式である. また, $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ がともに論理式ならば, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ のおのおのはすべて論理式である.

2.23. $\mathfrak{F}(a)$ が論理式で a が自由変数であるとき,

$$\forall x\mathfrak{F}(x) \quad \text{および} \quad \exists x\mathfrak{F}(x)$$

はともに論理式である. ただし, x は $\mathfrak{F}(a)$ に現われない任意の束縛変数で, $\mathfrak{F}(x)$ は $\mathfrak{F}(a)$ のなかのすべての a に x を代入した結果を意味する.

2.24. 以上の 2.21—2.23 によって論理式であることがわかるものだけを論理式という.

2.3. このように定義された論理式という概念は, 純粋に syntactical な概念と理解すべきである. Semantical に解釈すれば同一の内容をもつ論理式といえども, その表現が異なれば, 異なった論理式と考えなければならない.

3. 論理式に関する一般的注意

3.1. この§のはじめにおいて, 論理式の定義に際しては〈対象領域〉を一つ固定して考える, と述べた. しかし, 対象領域というのは semantic な概念であり, 論理式というのは syntactical な概念であった. 純粋に syntactical な立場からは, 論理式を定義するのに, 対象領域とか, あるいは数学的理論などというものをあらかじめ固定しておく必要は何もない. 論理式の定義に必要なものは (したがって, term の定義に必要なものをも含めて), じつは

対象記号　**自由変数**　**束縛変数**
関数記号　**述語記号**　**論理記号**

とよばれる各種の記号の list だけなのである. この list をあげることによって, term および論理式の概念は確定する.

3.11. 論理記号の list は, あらゆる場合を通じて, つねに一定して

いると考えてよろしい．もっとも，場合によっては，このうちの幾つかが除かれることもありうる．たとえば，$\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ を $(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}$ の略記号と考えたり，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ を $\neg((\neg\mathfrak{A})\wedge(\neg\mathfrak{B}))$ の略記号と考えたりする場合には，$\supset$ とか $\vee$ を論理記号の list からはずしておくのである．

また，$(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\supset\mathfrak{A})$ を $\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$ と表わすときの記号 $\sim$ を primitive な記号と考え，初めから論理記号の list に加えておいてもよい．

3.12．自由変数および束縛変数の list は，それぞれ，**可算無限個**の記号からなっているとする．

われわれの使用する変数はつねに有限個である．しかし，自由変数にせよ束縛変数にせよ，これまでに用いられていない新しい変数を使用しうる可能性を残しておく必要がある．そのために，われわれは，無限個の変数を用意しておかねばならない．と同時に，われわれの用いる変数の個数がつねに有限にとどまる，という同じ理由から，可算個の変数を用意しておけば十分である，ということもわかる．

可算無限個の記号の list をあげつくすことは，実際には，われわれにとっては不可能なことである．しかし，たとえば，自由変数とは

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

というように，a という文字に 10 進法で表わされた自然数を index としてつけたものであり，束縛変数とは

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots$$

のように，x という文字に index として自然数をつけたものである，といっておけば，それらの list をあげたのと事実上では同じことになる．もちろん，これと同じ効果をもつ方法は，これ以外にもいろいろとあるであろうから，実際には一つの方法に拘泥することなく，適当な文字を用いて自由変数や束縛変数を表わしておく．ただ，原理的には，可算無限個の自由変数・束縛変数が与えられていることになっている，と考えていなければならないのである．

3.13．自由変数・束縛変数というものも，論理記号と同様に，あらゆる場合を通じて共通のものを用いるものということにしておけば，結局のところ，論理式の概念は

対象記号　　関数記号　　述語記号

という 3 種類の記号の list をあげることによって定まるものと考えることができる．

3.2. 論理式の例

3.21. 形式的な自然数論においては，対象記号・関数記号・述語記号として

対象記号：1

関数記号：+，・

述語記号：=

を採用した論理式を用いることがしばしばある．ただし，+（加法）および・(乗法) はともに2変数の関数記号で，= は2変数の述語記号である．

$$s+t, \quad s\cdot t \text{ [または, } st\text{]}, \quad s=t$$

は，それぞれ

$$+(s,t), \quad \cdot(s,t), \quad =(s,t)$$

を意味する．

3.211. 1，1+1，(1+1)+1，…

はすべて term である．これらは，semantical には，

1，2，3，…

という自然数を表わす．

3.212. a，b を自由変数，x を束縛変数とすれば，

$$\exists x(a+x=b)$$

は論理式である．対象領域を自然数の全体と考え，この論理式を semantical に解釈すれば，これは

$$a<b$$

という命題を表わす．

一般に

$$s<t$$

という形の表現は

$$\exists x(s+x=t)$$

の略記号であると考えれば，< という述語記号を用いるのと同じ効果をあげうる．

3.213. $s<t \vee s=t$

を $s\leqq t$ と略記するのは，通常用いられている方法と同じである．

3.214. $\exists x(ax=b)$

という論理式を semantical に［対象領域を自然数の全体と考えて］解釈すれば，a は b の約数である，という命題

$$a|b$$

を意味している．

3.215. 〈a は素数である〉という命題 —— それを Prim a と表わす —— は

$$\neg(a=1) \wedge \forall y[y|a \supset (y=1 \vee y=a)]$$

という論理式で表現することができる．ここで，

$$y|a$$

とは

$$\exists x(yx=a)$$

の略記号であると考える．したがって，y は x と異なる束縛変数でなければならぬ．

3.216. $\forall z \exists u(z<u \wedge \mathrm{Prim}\ u)$

という論理式は，〈素数は無限にある〉という Euclid の定理を意味している．

3.22. 自然数論の論理式を定義するのに，対象記号や関数記号を一つも用いない方法もある．そのときは，1という対象記号の代わりに

Eins

という1変数の述語記号を，＋および・という2変数の関数記号の代わりには，

Sum, Prod

という3変数の述語記号を用いる．ここで，semantical には

$$\mathrm{Eins}(a), \quad \mathrm{Sum}(a,b,c), \quad \mathrm{Prod}(a,b,c)$$

がそれぞれ，

$$a=1, \quad a+b=c, \quad ab=c$$

を意味すると考えるのである．

この場合には，3.211 におけるように，個々の自然数を表わす term は作りえない．しかし，3.212—3.216 に相当することはすべて可能である．すなわち，命題を表現するには，3.21 の方法と全く同等の効力をもっているのである．

たとえば，$a<b$, $a|b$, Prim a は，それぞれ

$$\exists x\,\mathrm{Sum}(a, x, b),$$
$$\exists x\,\mathrm{Prod}(a, x, b),$$
$$\neg\mathrm{Eins}(a) \wedge \forall y[y|a \supset (\mathrm{Eins}(y) \vee y=a)]$$

と表わされる.

あるいは，また，term を含む論理式

$$\neg\exists x(x+1=1)$$

に相当するものとしては,

$$\forall y(\mathrm{Eins}(y) \supset \neg\exists x\,\mathrm{Sum}(x, y, y))$$

を採用することができる.

3.3. 上の例 (3.22) からもわかるように，対象記号と関数記号は一つもなくてもよい．そのようなものがなくても，自由変数というものがある以上 term は存在する.

これに反して，述語記号なるものは**少なくとも一つ**用意しておかねばならない．述語記号が一つもないと，論理式というものが一つも存在しないことになるからである.

3.4. 純粋に syntactical な立場で考えれば,

対象記号　　関数記号　　述語記号

ならびに

自由変数　　束縛変数　　論理記号

などは，すべて単なる記号にすぎない．1.11，1.12，1.13 および 2.11 に述べた説明は，すべて semantic な解釈を示したものである．$\wedge$，$\vee$，$\supset$，$\neg$，などの記号も，syntax においては，真理関数とか，あるいは命題にほどこされる演算とかいう特別な意味は何もない．$\forall x$ および $\exists x$ という quantifier も，対象領域というものが指定されていない以上，その意味を考えることすらできないのである.

練 習 問 題

1. 4以上の任意の偶数は二つの素数の和として表わされる (**Goldbach の問題**)，という命題を論理式で表わせ．ただし，対象記号・関数記号・述語記号は原則として 3.21 に述べたものとするが，適当な略記号は用いてよい．対象領域は自然数の全体とする.

2. 対象領域を一つの順序集合と考え，M をその部分集合とする.

いま，〈a が M の元である〉ということを

$$M(a)$$

と表わすことにして［すなわち，M を述語記号と考えて］，つぎの各命題を論理式で表わせ．

1) a は M の上界である．

2) M は上に有界である．

3) a は M の上限である．

ただし，述語記号としては，M 以外に，順序関係を表わす $\leq$ を用いてよい．

3. 自由変数 a を含む論理式 $\mathfrak{F}(a)$ から，〈$\mathfrak{F}(x)$ を満たす x がただ一つ存在する〉という意味を表わす論理式を作れ．ただし，等号$=$を述語記号として用いる．

注意 〈$\mathfrak{F}(x)$ を満たす x がただ一つ存在する〉という意味の論理式を，しばしば

$$\exists!x\mathfrak{F}(x)$$

と略記することがある．

4. 集合 G の任意の2元 x，y に対して G の元 xy が一意的に対応して，それがある幾つかの公理を満足するとき，G は群とよばれる．つぎにあげるものは，群の公理として普通に採用されているものの一つである：

1) 任意の元 x，y，z に対して $(xy)z=x(yz)$．

2) 任意の元 x に対して $ex=x$ となる元 e が少なくとも一つ存在する．

3) 任意の元 x に対して $x^{-1}x=e$ となる元 x^{-1} が少なくとも一つ存在する．

この公理を文字どおり記号化して

1) $\forall x\forall y\forall z[(xy)z=x(yz)]$

2) $\exists e\forall x(ex=x)$

3) $\forall x\exists y(yx=e)$

としたのでは，群の公理として不完全である．対象記号・関数記号・述語記号をはっきり定め，公理の完全な表現を作れ．対象領域は G としておく．

§4. 述 語 論 理

この § においては,

対象記号　　関数記号　　述語記号

の list を一つ固定して考える．そして，これと，可算個の自由変数・束縛変数，ならびに論理記号

$\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$

で作られる論理式の全体からなる集合 $\boldsymbol{L}$ に対して semantic な考察を行なう．

1. まず，空でない集合 $\boldsymbol{D}$ を選び，$\boldsymbol{D}$ を対象領域と考える．詳しくいえば，個々の対象記号が $\boldsymbol{D}$ のいかなる元を表わすかを定め，また，個々の関数記号・述語記号が $\boldsymbol{D}$ で定義されたいかなる関数ならびに述語を表わすかということを定める．それと同時に，自由変数・束縛変数をすべて $\boldsymbol{D}$ を変域とする変数と考え，おのおのの論理記号は，その本来の意味をもつものとするのである．

このように考えることによって，syntactical な概念であった個々の論理式というものを，それぞれ，なんらかの意味をもつ命題の表現と考えることができるようになる．

この解釈によって，最も意味のはっきりするものは，自由変数を含まない論理式である．われわれは，自由変数を一つも含まない論理式を**閉じた論理式** (closed formula) とよぶ．しからば，上記のような解釈を一つ与えることによって，個々の閉じた論理式は，それぞれ真または偽な命題を表わすことになる．[1)]

自由変数を含む論理式 —— **開いた論理式** (open formula) —— の意味はこれほどに明瞭ではない．しかし，それは，つぎのように考えることができる：

$$\mathfrak{F}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

を，a_1, a_2, $\cdots$, a_n 以外には自由変数を含まない論理式とする．ただし，

1）もちろん，これは原理的な話であって，その真偽をわれわれが知りうるや否やは，おのずから別問題である．

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ のなかに，この論理式には実際に現われない変数があってもよい．ここで，

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

は相異なる自由変数とする．いま，必ずしも相異ならない $\boldsymbol{D}$ の任意の元を n 個選び，それを

$$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$$

とし，$\mathfrak{F}(a_2, a_2, \cdots, a_n)$ の各 a_i にそれぞれ e_i を代入した結果を

$$\mathfrak{F}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

とすれば，これは真または偽のいずれかに定まった命題を表わしている．

ここで注意すべきは，$\mathfrak{F}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ というのは，もはや一般には論理式（$\boldsymbol{L}$ の元）ではない，ということである．$e_1, e_2, \cdots, e_n$ は $\boldsymbol{D}$ の任意の元であって，それを表わす対象記号が存在するわけでもなく，また一歩をゆずっても，それを表わす term が存在するとも限らないからである．それよりも，これはむしろ $\mathfrak{F}(a_1, a, \cdots, a_n)$ を全く semantic な表現と考え直した上で，初めて考えることのできる表記法なのである．

2. 上のような解釈を一つ固定したうえで，その解釈をもとにして，われわれは，任意の論理式 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ に対して，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ の関係

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が成立するとか，あるいは，成立しないということを，つぎのように定義しようと思う：

2.01. $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ がともに閉じた論理式である場合には，それらの真偽は確定しているから，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

も普通のとおりに定義することができる．

2.02. $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ のいずれか〔あるいは，両方〕が開いた論理式である場合には，$\mathfrak{A}$ に現われる自由変数と $\mathfrak{B}$ に現われる自由変数の全体を考え，それを

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

とする．そして，$\mathfrak{A}$ も $\mathfrak{B}$ も，これ以外の自由変数を含まないという意

味をこめて，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ を，それぞれ

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \cdots, a_n), \qquad \mathfrak{B}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

と表わしておこう．いま，

$$e_1, \ e_2, \ \cdots, \ e_n$$

を必ずしも相異ならない n 個の対象（$=\boldsymbol{D}$ の元）とすれば，まえに述べた意味において，

$$\mathfrak{A}(e_1, e_2, \cdots, e_n) \quad \text{および} \quad \mathfrak{B}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

はともに真偽の確定した命題を表わしている．したがって，

$$(*) \qquad \mathfrak{A}(e_1, e_2, \cdots, e_n) \to \mathfrak{B}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

が成立するかどうかということもまた確定しているわけである．

ここで，われわれは，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ という関係が成立するということを，つぎのように定義する：

任意の対象 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ に対して，**つねに** (*) という関係が成立するとき，および，そのときに限って

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \to \mathfrak{B}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

である，と定義するのである．

2.1. このように $\to$ を定義すると，この関係 $\to$ によって論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ は**古典命題論理**（classical propositional logic; 第 I 編，§7 の意味における古典論理）となる．

このことを示すには，つぎにあげる諸性質が成立することを確認すれば十分である（第 I 編，§7，3 参照）．ここで，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$，$\mathfrak{C}$ は任意の論理式を表わしている．

0.1) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$.

0.2) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$.

1.1) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\quad \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$.

1.2) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$.

2.1) $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$, $\quad \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$.

2.2) $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$.

3.1) $\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}$.

3.2) $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

4.1) $\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{A} \to \curlywedge$.

4.2) $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C} \to \curlywedge$ ならば $\mathfrak{C} \to \neg\mathfrak{A}$.

5.1)　$\mathfrak{A} \to \curlyvee$.

5.2)　$\curlywedge \to \mathfrak{A}$.

6)　$\curlyvee \to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$.

以上のうち，4.1)，4.2)，5.2) および 5.1)，6) には，それぞれ 人 および Y という記号が現われる．人 ならびに Y というのが命題記号（0 変数の述語記号）としてすでに論理式となっていれば問題はない．しかし，そうでない場合にも，論理式というものが少なくとも一つ存在する以上，その一つを固定して $\mathfrak{D}$ とする．そうして，Y という記号がそのままでは論理式でない場合には，Y を

$$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}$$

という論理式の略記号と考え，人 という記号が論理式でない場合には，人 を

$$\mathfrak{D} \wedge \neg\mathfrak{D}$$

の略記号と考える．このような規約をしたうえでは，上の 0.1)—6) のおのおのを確認することはすべて容易である．

2.2.　以上で，$\boldsymbol{L}$ が → に関して古典命題論理になっていることはわかったが，この $\boldsymbol{L}$ は，それ以上の性質をもっている．

2.21. ∀ に関する性質

2.211.　$\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)$.

ここで，$\forall x\mathfrak{F}(x)$ はこの形をした任意の論理式で，t は任意の term である．そして $\mathfrak{F}(t)$ は，$\mathfrak{F}(x)$ におけるすべての x に t を代入して得られた論理式を意味する．

この証明もほとんど明らかではあるが，念のために述べておけば，つぎのようになる：

まず，$\forall x\mathfrak{F}(x)$ に含まれる自由変数と t に含まれる自由変数の全体を考え，それを

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

とする．そして，$\forall x\mathfrak{F}(x)$ および t を，それぞれ

$$\forall x\mathfrak{F}(x, a_1, \cdots, a_n) \quad \text{および} \quad t(a_1, \cdots, a_n)$$

と表わしておく．しからば $\mathfrak{F}(t)$ は

$$\mathfrak{F}(t(a_1, \cdots, a_n), a_1, \cdots, a_n)$$

と表わされる．

いま，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ を任意の対象とする．そうすれば，

$$t(e_1, \cdots, e_n)$$

はある一つの対象を表わし，

$$\mathfrak{F}(x, e_1, \cdots, e_n)$$

は，1 変数 x の或る述語を表わす．よって［§1, 4.1 の 1）によれば］，

$$\forall x \mathfrak{F}(x, e_1, \cdots, e_n) \to \mathfrak{F}(t(e_1, \cdots, e_n), e_1, \cdots, e_n).$$

ここで，e_1，…，e_n は任意の対象であったから

$$\forall x \mathfrak{F}(x, a_1, \cdots, a_n) \to \mathfrak{F}(t(a_1, \cdots, a_n), a_1, \cdots, a_n).$$

これで証明は終わった．

2.212. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(a)$

で，しかも**自由変数** a **が** $\mathfrak{A}$ **に含まれなければ，**

$$\mathfrak{A} \to \forall x \mathfrak{F}(x).$$

ここで，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{F}(a)$ は任意の論理式で，x は $\mathfrak{F}(a)$ に含まれない束縛変数．そして，$\mathfrak{F}(x)$ は $\mathfrak{F}(a)$ の**すべての** a に x を代入した結果を意味する．

証明 $\mathfrak{A}$ に含まれる自由変数と $\forall x \mathfrak{F}(x)$ に含まれる自由変数の全体を考え，それを

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

とする．まず，与えられた条件により，a は $\mathfrak{A}$ にも含まれず，また，$\forall x \mathfrak{F}(x)$ にも含まれない．よって a は，a_1，a_2，…，a_n のいずれとも異なる．

$\mathfrak{A}$ および $\forall x \mathfrak{F}(x)$ を

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n), \qquad \forall x \mathfrak{F}(x, a_1, \cdots, a_n)$$

と表わしておく．しからば，$\mathfrak{F}(a)$ は

$$\mathfrak{F}(a, a_1, \cdots, a_n)$$

と表わされる．

定理の仮定により，任意の対象 $e, e_1, e_2, \cdots, e_n$ に対して，

$$\mathfrak{A}(e_1, \cdots, e_n) \to \mathfrak{F}(e, e_1, \cdots, e_n).$$

さて，a が $a_1, \cdots, a_n$ のいずれとも異なるということから，$e_1, \cdots, e_n$ を固定した上で，e を任意の対象とすることができる．よって［§1, 4.1 の 2）により］，

$$\mathfrak{A}(e_1,\cdots,e_n)\to\forall x\mathfrak{F}(x,e_1,\cdots,e_n).$$

ここで，$e_1,\cdots,e_n$ が任意の対象であったことに注意すれば，

$$\mathfrak{A}(a_1,\cdots,a_n)\to\forall x\mathfrak{F}(x,a_1,\cdots,a_n).$$

これで証明は終わった．

2.22. ∃ に関する性質

2.221. $\mathfrak{F}(t)\to\exists x\mathfrak{F}(x)$.

証明は，2.211 と同様 [§1, 4.2 の 1) による].

2.222. $\mathfrak{F}(a)\to\mathfrak{A}$

で，しかも**自由変数** a **が** $\mathfrak{A}$ **に含まれなければ，**

$$\exists x\mathfrak{F}(x)\to\mathfrak{A}.$$

ただし，$\mathfrak{F}(x)$ は $\mathfrak{F}(a)$ の**すべての** a に x を代入した結果とする．

証明は，2.212 と同様 [§1, 4.2 の 2) による].

3. 論理式の集合 L において，論理式の間の関係 → が定義され，しかも，つぎに述べる諸性質が成立しているとき，この関係 → によって L は**述語論理**をなす，といわれる：

反射律： $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$.

推移律： $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$.

∧-左： $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$.

∧-右： $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$.

∨-右： $\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$.

∨-左： $\mathfrak{A}\to\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$ ならば $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\to\mathfrak{C}$.

⊃-左： $\mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})\to\mathfrak{B}$.

⊃-右： $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$ ならば $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$.

¬-左： $\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{A}\to$ 人.

¬-右： $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{C}\to$ 人 ならば $\mathfrak{C}\to\neg\mathfrak{A}$.

∀-左： $\forall x\mathfrak{F}(x)\to\mathfrak{F}(t)$.

∀-右： $\mathfrak{A}\to\mathfrak{F}(a)$ ならば $\mathfrak{A}\to\forall x\mathfrak{F}(x)$.

ただし，a は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}(x)$ に含まれていないとする．

∃-右： $\mathfrak{F}(t)\to\exists x\mathfrak{F}(x)$.

∃-左： $\mathfrak{F}(a)\to\mathfrak{A}$ ならば $\exists x\mathfrak{F}(x)\to\mathfrak{A}$.

ただし，a は $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}(x)$ に含まれていないとする．

⋎の性質：　$\mathfrak{A} \to ⋎$.

⋏の性質：　$⋏ \to \mathfrak{A}$.

排中律：　$⋎ \to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$.

これらを**述語論理の公理**とよぶ．

以上の公理において，$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ は任意の論理式で，$\forall x\mathfrak{F}(x)$ および $\exists x\mathfrak{F}(x)$ はこのような形の任意の論理式である．しかも，x は任意の束縛変数でよく，a および t も任意の自由変数および任意の term である．そして，$\mathfrak{F}(a)$ および $\mathfrak{F}(t)$ は $\mathfrak{F}(x)$ におけるすべての x に a または t を代入した結果を意味している．ただし a は，$\forall$-右 および $\exists$-左 において，そこで〈ただし書き〉として述べてある条件 —— **変数条件** (Variablenbedingung) —— を満たしていなければならない．さらに，⋎ および ⋏ は，それらの記号がそれ自身で論理式となっている場合には，その記号そのものを表わしているが，そうでない場合には，他の特定の論理式をもって代用してさしつかえない．

3.1.　この〈述語論理〉の公理における → は，必ずしも 1 において定義されたような → とは限らない．関係 → がどのように定義されたものであろうとも，述語論理の公理を満たしていさえすれば，その → によって $\boldsymbol{L}$ は述語論理をなす，といわれるのである．

3.11.　2 で述べたことは，1 における解釈をもとに定義された → によって $\boldsymbol{L}$ が述語論理をなす，ということである．

3.12.　2 で定義された → は，一つの解釈を基礎としていた．そのような解釈は，対象領域としての集合 $\boldsymbol{D}$ を一つ固定したうえでも，いろいろなものがありうる．しかも，対象領域 $\boldsymbol{D}$ の選択も全く自由である以上，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ を一つ固定して考えても，1 に述べたような解釈をもとにするいろいろな述語論理を作ることができる．

もっとも，異なる解釈によって異なる述語論理が得られるかどうかは別問題である．$\boldsymbol{L}$ から作られる述語論理とは，論理式の間の関係 → によって規定される代数的構造であって，その関係 → がどのように定義されるかということには一応無関係な概念だからである．

3.13.　$\boldsymbol{L}$ を述語論理とする関係 → は，1 におけるような解釈をもとにして定義されるものだけではない．

3.131.　そのうちの最も簡単な例は，任意の論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対して，

つねに

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

という関係が成立するものとする，として定義される → である．

この → によって，$\boldsymbol{L}$ はもちろん述語論理となる．これは **trivial な述語論理**である．

この trivial な述語論理が 1 におけるような解釈からでは定義しえないことは，つぎのようにしてわかる：

いま，1 におけるような一つの解釈から定義された → を考える．そのような解釈では，真な命題を表わす論理式 $\mathfrak{A}$ も，偽な命題を表わす論理式 $\mathfrak{B}$ も，それぞれ，少なくとも一つは存在する［たとえば，$\mathfrak{D}$ を閉じた論理式の一つとして，$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{D} \wedge \neg\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{B}$ とすればよい］．このような $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ に対しては，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

は成立しない．よって，これは trivial な述語論理ではない．

3.132. この trivial な述語論理というのは，どちらかというと，あまり実際的なものではない．しかし，つぎにあげる例は，1 で述べたような解釈をもとにする述語論理に比べ，より実際的なものといえる．

ここでも，1 の意味における解釈を一つ固定して考える．そのとき，**原理的には**，閉じた論理式はすべて真偽の確定した命題を表わしているとはいうが，**実際には**，われわれはその真偽を知りえないことが多い．同様な意味で，任意の論理式 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ に対して，2 における意味の

$$(*) \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が成立するや否やは原理的には定まっているのであるが，多くの場合，われわれはそのことを知りえないのである．むしろ，われわれは，この → が述語論理の公理を満たすことを利用して，(*) が成立するかどうかを逆に調べようとしているのが実情である．その場合，述語論理の公理以外にも，その解釈についての多くの知識を持ちうるであろうし，その知識が用いられることも事実である．そこで，そのようにして，われわれが (*) という関係を証明しうるということを

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$$

と表わすことにする．しからば，⇒ もまた $\boldsymbol{L}$ において定義された一つの関係であり，この関係 ⇒ によっても $\boldsymbol{L}$ は述語論理をなす．もちろ

ん，

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \quad \text{ならば} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

ではあるが，その逆は必ずしも正しくない．

このような関係 ⇒ によって定義される述語論理は，**2** の方法によって定義された述語論理とは一般に異なる．**2** で定義された → に関しては，閉じた論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ に対して，つねに

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \quad \text{または} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$$

のいずれかが成立する．しかし，⇒ に関しては

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B} \quad \text{および} \quad \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A}$$

のいずれもが成立しないことがある．それは

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \quad \text{および} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$$

のいずれをも証明しえないことがある，ということによるのである．

3.2.　以上において〈述語論理〉と名づけてきたものは，いわゆる**古典述語論理**（classical predicate logic）である．もし，上に述べた述語論理の公理から〈排中律〉を除けば**直観主義の述語論理**（intuitionistic predicate logic）が得られるし，さらに〈人 の性質〉を除けば**最小論理としての述語論理**というものになる．

4.　述語論理の公理のうち，∀ および ∃ に関するものを除いたものは全体として古典命題論理の公理となっている．すなわち，まず第一に，任意の古典述語論理は古典命題論理となっている．古典述語論理とは，∀-左，∀-右，∃-右，∃-左 という四つの公理を満たす古典命題論理にほかならない．したがって，第 I 編の §8, **5** に述べた *LK* の方法によれば，∀ および ∃ に関する公理以外は，

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$$

という**反射律**をそのままに残して，他は**構造に関する推論規則**および**論理記号** $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\supset$ **に関する推論規則**によって置きかえることができる（第 I 編，§8 の 5.11 および 5.12）．

このように〈sequent〉を用いる方法で述語論理の公理を述べる場合には，∀-左，∀-右，∃-右，∃-左 という公理も，それぞれ，つぎの形の推論規則によって表わすことができる．ただし，そこで，Γ および Θ は任意の（空であってもよい）論理式の有限列で，$\forall x \mathfrak{F}(x)$ および

$\exists x\mathfrak{F}(x)$ は，このような形の任意の論理式．また，x，a，t はそれぞれ，任意の束縛変数，任意の自由変数，および任意の term で，$\mathfrak{F}(a)$ および $\mathfrak{F}(t)$ は $\mathfrak{F}(x)$ におけるすべての x に a および t を代入した結果として得られる論理式を意味する．ただし，$\forall$-右 および $\exists$-左 において，自由変数 a はつぎの変数条件を満たさなければならない．

変数条件 $\forall$-右 および $\exists$-左 において，a によって表わされる自由変数は，その推論規則によって得られる sequent

$$\Gamma \to \Theta,\ \forall x\mathfrak{F}(x) \quad \text{または} \quad \exists x\mathfrak{F}(x),\ \Gamma \to \Theta$$

に含まれてはいけない．

$$\forall\text{-左}\ \frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta} \qquad \exists\text{-右}\ \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Theta, \exists x\mathfrak{F}(x)}$$

$$\forall\text{-右}\ \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Theta, \forall x\mathfrak{F}(x)} \qquad \exists\text{-左}\ \frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Theta}{\exists x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}$$

これらの推論規則が 3 における $\forall$ および $\exists$ に関する公理と同等であることの証明は後に述べることにして (4.1, 4.2, 4.3, 4.4)，まず簡単な例をあげておく．

例 $\neg\forall x\mathfrak{F}(x) \equiv \exists x\neg\mathfrak{F}(x)$ (De Morgan の法則) の証明

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) & \\ \hline
\to \mathfrak{F}(a), \neg\mathfrak{F}(a) & \neg\text{-右} \\ \hline
\to \mathfrak{F}(a), \exists x\neg\mathfrak{F}(x) & \exists\text{-右} \\ \hline
\to \exists x\neg\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(a) & \\ \hline
\to \exists x\neg\mathfrak{F}(x), \forall x\mathfrak{F}(x) & \forall\text{-右} \\ \hline
\neg\forall x\mathfrak{F}(x) \to \exists x\neg\mathfrak{F}(x) & \neg\text{-左}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) & \\ \hline
\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(a) & \forall\text{-左} \\ \hline
\to \mathfrak{F}(a), \neg\forall x\mathfrak{F}(x) & \neg\text{-右} \\ \hline
\to \neg\forall x\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(a) & \\ \hline
\neg\mathfrak{F}(a) \to \neg\forall x\mathfrak{F}(x) & \neg\text{-左} \\ \hline
\exists x\neg\mathfrak{F}(x) \to \neg\forall x\mathfrak{F}(x) & \exists\text{-左}
\end{array}$$

問 $\neg\exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ (De Morgan の法則) を，上の例と同様な方法で証明せよ．

4.1. $\forall$-左 について．

(1) $$\frac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}$$

という推論規則が

(2) $$\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)$$

という公理から導かれることは，cut を用いて

$$\frac{\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t) \quad \mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta} \quad (2)$$

とすれば，すぐにわかる．逆に，（1）という推論規則を用いれば，（2）は

$$\frac{\mathfrak{F}(t) \to \mathfrak{F}(t)}{\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)}$$

として証明される．

4.2.　∃-右 について．

これは，4.1 と全く同様に（双対的に）考えればよい．

4.3.　∀-右 について．

上に述べた ∀-右 という推論規則において，Γ を $\mathfrak{A}$ という一つの論理式，Θ を空と考えた特別な場合が 3 における ∀-右 である．すなわち，3 における ∀-右 は，上述の ∀-右 に含まれている．したがって，3 における ∀-右 を用いて上述の ∀-右 を証明しうるかどうかだけが問題である．

Γ および Θ を，それぞれ

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \quad \text{および} \quad \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$$

という列と考えれば，∀-右 という推論規則は

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{F}(a)}{\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu, \forall x\mathfrak{F}(x)}$$

ということになる．ただし，変数条件により，自由変数 a はすべての $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ ならびに $\forall x\mathfrak{F}(x)$ に含まれてはいない．

さて，命題論理の一般的性質により，

（3）　$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{F}(a)$

という sequent から

$$\neg\mathfrak{B}_\nu, \cdots, \neg\mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{F}(a)$$

が導かれ，さらには

$$\neg\mathfrak{B}_\nu \wedge \cdots \wedge \neg\mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{F}(a)$$

が導かれる．ここで，この sequent の左辺は一つの論理式であるから，3 における ∀-右 という公理を用いると，変数条件も満たされているので

$$\neg\mathfrak{B}_\nu \wedge \cdots \wedge \neg\mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu \to \forall x \mathfrak{F}(x)$$

が得られる．これから，前と逆の道をたどって，

（4）　$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu, \forall x \mathfrak{F}(x)$

が得られる．

（3）から（4）が導けるということが，$\forall$-右 という推論規則の内容である．

以上において，$\mu=0$ または $\nu=0$ の場合にも，議論はそのままで通用する［$\mu=\nu=0$ の場合には，空な conjunction は最大元 $\curlyvee$ を表わす，という考えを用いればよい］．

4.4. $\exists$-左 について．

これも，4.3 と双対的に考えればよい．しかし，直観主義の論理を考慮に入れ，わずかの変更をほどこした証明を述べておく．

上述の $\exists$-左 の特別な場合として 3 における $\exists$-左 が含まれていることは 4.3 と同様である．したがって，

（5）　$\mathfrak{F}(a), \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$

から

（6）　$\exists x \mathfrak{F}(x), \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$

が導かれることを，変数条件のもとで，3 における $\exists$-左 を用いて示せばよい．

（5）から

$$\mathfrak{F}(a) \to (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{B}_\nu)$$

が導かれる［$\nu=0$ のとき，この右辺は

$$(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu) \supset 人 \quad または \quad \neg(\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu)$$

と理解する］．　ここで 3 における $\exists$-左 を用いて

$$\exists x \mathfrak{F}(x) \to (\mathfrak{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \cdots \vee \mathfrak{B}_\nu)$$

が得られ，それより（6）が導かれる．

以上の 4 に述べた方法で，sequent として右辺にたかだか 1 個の論理式をもつものだけを用いるものとすれば，それが〈直観主義の述語論理〉となることがわかる．

練 習 問 題

1. 任意の古典述語論理において，つぎの形の関係式はすべて成立する．

1) $\forall x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall y\mathfrak{F}(y)$

2) $\exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \exists y\mathfrak{F}(y)$

3) $\forall x\mathfrak{F}(x) \to \exists x\mathfrak{F}(x)$

4) $\forall x\forall y\mathfrak{F}(x, y) \equiv \forall y\forall x\mathfrak{F}(x, y)$

5) $\exists x\exists y\mathfrak{F}(x, y) \equiv \exists y\exists x\mathfrak{F}(x, y)$

6) $\exists y\forall x\mathfrak{F}(x, y) \to \forall x\exists y\mathfrak{F}(x, y)$

7) $\mathfrak{A} \wedge \forall x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall x(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{F}(x))$

8) $\mathfrak{A} \vee \forall x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall x(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{F}(x))$

9) $\mathfrak{A} \vee \exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \exists x(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{F}(x))$

10) $\mathfrak{A} \wedge \exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \exists x(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{F}(x))$

11) $\mathfrak{A} \supset \forall x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall x(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}(x))$

12) $\mathfrak{A} \supset \exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \exists x(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}(x))$

13) $\forall x\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A} \equiv \exists x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A})$

14) $\exists x\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A} \equiv \forall x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A})$

15) $\forall x(\mathfrak{F}(x) \wedge \mathfrak{G}(x)) \equiv \forall x\mathfrak{F}(x) \wedge \forall x\mathfrak{G}(x)$

16) $\exists x(\mathfrak{F}(x) \vee \mathfrak{G}(x)) \equiv \exists x\mathfrak{F}(x) \vee \exists x\mathfrak{G}(x)$

17) $\exists x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{G}(x)) \equiv \forall x\mathfrak{F}(x) \supset \exists x\mathfrak{G}(x)$

18) $\forall x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{G}(x)) \to \forall x\mathfrak{F}(x) \supset \forall x\mathfrak{G}(x)$

19) $\forall x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{G}(x)) \to \exists x\mathfrak{F}(x) \supset \exists x\mathfrak{G}(x)$

2. 前問において，8)，12)，13)，17) を除けば，あとはすべて直観主義の述語論理においても成立する．

3.
$$\neg\exists x\mathfrak{F}(x) \equiv \forall x \neg\mathfrak{F}(x)$$
という De Morgan の法則は直観主義論理においても成立する（本文 4 の問 参照）．

4. つぎの各関係式は直観主義論理において成立する．

1) $\exists x \neg\mathfrak{F}(x) \to \neg\forall x\mathfrak{F}(x)$

2) $\mathfrak{A} \vee \forall x\mathfrak{F}(x) \to \forall x(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{F}(x))$

3) $\exists x(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}(x)) \to \mathfrak{A} \supset \exists x\mathfrak{F}(x)$

4) $\exists x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A}) \to \forall x\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A}$

5) $\exists x(\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{G}(x)) \to \forall x\mathfrak{F}(x) \supset \exists x\mathfrak{G}(x)$

5. ＝という2変数の述語記号がある場合を考える．もし，任意の term t に対して

$$t=t \qquad \text{(反射律)}$$

という論理式がすべて最大元（真な論理式）で，しかも，任意の論理式 $\mathfrak{F}(a)$ および任意の term s, t に対して，つねに

$$s=t,\ \mathfrak{F}(s) \to \mathfrak{F}(t)$$

という関係が成立するとき，そのような述語論理[1]を **equality をもつ述語論理**（predicate logic with equality）という．

Equality をもつ述語論理においては

$$s=t \to t=s \qquad \text{(対称律)}$$

$$r=s,\ s=t \to r=t \qquad \text{(推移律)}$$

が任意の term r, s, t に対して成立する．

6. Equality をもつ述語論理では

$$s=t \to \mathfrak{F}(s) \sim \mathfrak{F}(t).$$

7. $\varphi(a)$ を任意の term とし，$\varphi(a)$ に含まれる自由変数 a のすべてに term s および t を代入して得られる term をそれぞれ $\varphi(s)$ および $\varphi(t)$ と表わせば，equality をもつ述語論理においては，

$$s=t \to \varphi(s)=\varphi(t).$$

8. 論理式 $\mathfrak{F}(X)$ に含まれる命題変数 X のすべてに論理式 $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ を代入して得られる論理式をそれぞれ $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ および $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ と表わせば，

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B},\ \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{B}).$$

注意 1. われわれの用いている論理式の集合 L の基礎となる述語記号の list に命題変数なるものが含まれていないときには，その list に X という命題変数を加え，新しい論理式の集合 L' を作る．$\mathfrak{F}(X)$ は L' の元であるが，$\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ および $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ は L の元となる．

注意 2. 任意の $\mathfrak{F}(X)$ と $\mathfrak{A}$ とから作られる $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ は必ずしも論理式ではない．たとえば

$$\mathfrak{F}(X) \text{ が } \forall x(X \wedge F(x)), \quad \mathfrak{A} \text{ が } \exists xF(x)$$

であれば，

1） これは古典述語論理であっても直観主義の述語論理であってもよい．それに応じて，それぞれの意味における〈equality をもつ述語論理〉の概念が定まる．以下の議論は，そのいずれに対しても成立する．

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \quad \text{は} \quad \forall x(\exists x F(x) \land F(x))$$

となり，論理式ではない．$\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ および $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ が論理式であると特にことわったのは，このような場合を除くためである．

9. P を1変数の述語変数とし，与えられた論理式に含まれる $P(u)$ という形の部分をすべて，他の論理式 $\mathfrak{A}(a)$ から作られる $\mathfrak{A}(u)$ に置き替えた結果を示すために，与えられた論理式を $\mathfrak{F}_x(P(x))$ と表わし，その結果を $\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ と表わす．$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ の定義は以下のとおりである：

0) 論理式 $\mathfrak{F}_x(P(x))$ が P を含まない場合には，$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ という表現は $\mathfrak{F}_x(P(x))$ そのものを意味する．

以下，$\mathfrak{F}_x(P(x))$ は P を含むものとして，$\mathfrak{F}_x(P(x))$ に含まれる論理記号の個数に関する帰納法によって定義する．

1) $\mathfrak{F}_x(P(x))$ が論理記号を含まない場合には，$\mathfrak{F}_x(P(x))$ は $P(t)$ という形をしている．そのとき，$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ は $\mathfrak{A}(t)$を意味する．

2) $\mathfrak{F}_x(P(x))$ が

$$\mathfrak{G}_x(P(x)) \land \mathfrak{H}_x(P(x)), \qquad \mathfrak{G}_x(P(x)) \lor \mathfrak{H}_x(P(x)),$$
$$\mathfrak{G}_x(P(x)) \supset \mathfrak{H}_x(P(x)), \qquad \neg\mathfrak{G}_x(P(x))$$

という形をしている場合には，帰納法の仮定により

$$\mathfrak{G}_x(\mathfrak{A}(x)) \quad \text{および} \quad \mathfrak{H}_x(\mathfrak{A}(x))$$

はすでに定義されているから，$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ はそれぞれの場合に応じて

$$\mathfrak{G}_x(\mathfrak{A}(x)) \land \mathfrak{H}_x(\mathfrak{A}(x)), \qquad \mathfrak{G}_x(\mathfrak{A}(x)) \lor \mathfrak{H}_x(\mathfrak{A}(x)),$$
$$\mathfrak{G}_x(\mathfrak{A}(x)) \supset \mathfrak{H}_x(\mathfrak{A}(x)), \qquad \neg\mathfrak{G}_x(\mathfrak{A}(x))$$

を表わすものとする．

3) $\mathfrak{F}_x(P(x))$ が

$$\forall y\, \mathfrak{G}_x(y, P(x)) \quad \text{または} \quad \exists y\, \mathfrak{G}_x(y, P(x))$$

という形をしている場合には，b をこの論理式にも $\mathfrak{A}(a)$ にも含まれない自由変数とすれば，帰納法の仮定により，

$$\mathfrak{G}_x(b, \mathfrak{A}(x))$$

はすでに定義されていると考えてよく，$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ は，それぞれ

$$\forall y\, \mathfrak{G}_x(y, \mathfrak{A}(x)) \quad \text{または} \quad \exists y\, \mathfrak{G}_x(y, \mathfrak{A}(x))$$

を意味するものとする．[1)]

---

1) この場合，$\mathfrak{A}(a)$ のなかに y という束縛変数が含まれていれば，$\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ は論理式ではない．

このようにに定義したとき，もし $\mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x))$ および $\mathfrak{F}_x(\mathfrak{B}(x))$ がともに論理式であるならば

$$\forall x(\mathfrak{A}(x) \sim \mathfrak{B}(x)),\ \mathfrak{F}_x(\mathfrak{A}(x)) \to \mathfrak{F}_x(\mathfrak{B}(x))$$

という関係が成立する．

10. 前問に述べたことが2変数以上の述語変数についても成立することを確かめよ．

11. $\forall x(x=x)$ を真な命題（＝最大元）とする述語論理が equality をもつ述語論理となる条件は，任意の term s, t および**論理記号を一つも含まない**任意の論理式 $\mathfrak{F}(a)$ に対して

$$s=t,\ \mathfrak{F}(s) \to \mathfrak{F}(t)$$

が成立することである．

12. n 変数の述語記号 F に対して，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[(x_1=y_1 \wedge \cdots \wedge x_n=y_n) \supset (F(x_1, \cdots, x_n) \supset F(y_1, \cdots, y_n))]$$

という論理式を F **に関する equality axiom** とよぶ．

前問を利用し，$\forall x(x=x)$ を真とする述語論理が equality をもつ述語論理となるのは，つぎの2条件 1)，2) が成立することである，ということを示せ．

1) すべての述語記号に関する equality axiom が真．

2) 任意の term s, t, $\varphi(a)$ に対して

$$s=t \to \varphi(s)=\varphi(t).$$

13. n 変数の関数記号 f に対して，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n[(x_1=y_1 \wedge \cdots \wedge x_n=y_n) \supset f(x_1, \cdots, x_n)=f(y_1, \cdots, y_n)]$$

という論理式を f **に関する equality axiom** とよぶ．

前問［とくに 2)］を利用し，$\forall x(x=x)$ を真とする述語論理が equality をもつ述語論理となる必要十分条件は，すべての関数記号・述語記号に関する equality axiom が真となることである，ということを示せ．

14. $\forall x(x=x)$ が真という仮定のもとでは，$=$ に関する equality axiom が真となる条件は，

$$\forall x \forall y(x=y \supset y=x),$$

$$\forall x \forall y \forall z[(x=y \wedge y=z) \supset x=z]$$

がともに真となることである．

§5. 述 語 計 算

一般の命題論理というものに対して〈命題計算〉というものを考えたのと全く同様に，述語論理においても，**述語計算**（predicate calculus）というものを考える．ただ，命題論理と異なる点を考えれば，述語論理においては，初めから論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ というものだけを考えてきたということである．その意味で，すべての述語論理はみな述語計算であると考えることもできる．ただ，§4 における述語論理に対する考察は semantic なものであった．確かに，〈述語論理〉という一つ代数系を考察する以上，もはや〈対象領域〉とか〈解釈〉とかいうものは考えない（§4，3.1）という点においては syntactical な考察であったともいえる．しかし，→ という関係を〈与えられたもの〉と考える点において semantic なのである．純粋な syntax においては，与えられるものは〈記号〉のごとき具体性をもつもののみであって，〈関係〉というような抽象的な内容をもつものは，すべてわれわれの責任において定義しなければならぬ．一般の述語論理というものと〈述語計算〉の差異はその点にのみあるのである．

0.　以下，§4 と同じ意味において，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ が与えられているものとする．すなわち，$\boldsymbol{L}$ の元のみを論理式とよぶのである．

集合 $\boldsymbol{L}$ の選択に関しては，第 I 編，§9 の 4 における注意がそのまま当てはまる．それ以外の点においては全く自由である．

1.　述語計算 *LK*

1.1.　$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$ という任意の論理式に対して

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$$

という形式的表現を sequent とよぶ（μ，$\nu \geqq 0$）．

ここでは，sequent というのは，あくまでも形式的な表現そのものであって，§4 におけるような超数学的命題を表わす超数学的表現ではない．

1.2. *LK* の公理・推論規則

以下で $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ は任意の論理式で，Γ, Δ, Θ, Λ は任意の論理式の有限列．a, x, t はそれぞれ，任意の自由変数・束縛変数および term であり，$\forall x\mathfrak{F}(x)$，$\exists x\mathfrak{F}(x)$，$\mathfrak{F}(a)$，$\mathfrak{F}(t)$，などはすべて §4 と同様な意味とする．

1.21. 公理 $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$

1.22. 推論規則

1.221. 構造に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$$

$$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}}$$

$$\frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Theta} \qquad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

1.222. 論理記号に関する推論規則

$\wedge$-左 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \\ \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \end{array} \right.$ $\vee$-右 $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \\ \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \end{array} \right.$

$\wedge$-右 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}$ $\vee$-左 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$

$\neg$-左 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}$ $\neg$-右 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg\mathfrak{A}}$

$\supset$-左 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$ $\supset$-右 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$

$\forall$-左 $\dfrac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Theta}{\forall x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}$ $\exists$-右 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Theta, \exists x\mathfrak{F}(x)}$

$\forall$-右 $\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Theta, \forall x\mathfrak{F}(x)}$ $\exists$-左 $\dfrac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Theta}{\exists x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta}$

変数条件 $\forall$-右 および $\exists$-左 において a によって表わされている自由変数は，それぞれ，その推論規則によって導かれる sequent

$$\Gamma \to \Theta, \forall x\mathfrak{F}(x) \quad \text{または} \quad \exists x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Theta$$

には含まれてはいけない．

1.3.　**証明可能性**

1.31. **Sequent の証明可能性**（帰納的定義）

1.311.　公理はすべて証明可能である.

1.312.　証明可能な（1個または2個の）sequent から推論規則のいずれかによって導かれる sequent は証明可能である.

1.313.　以上の 1.311, 1.312 によって証明可能であることがわかる sequent だけが証明可能であるといわれる.

1.32　$\rightarrow \mathfrak{A}$

という sequent が証明可能であることを，論理式 $\mathfrak{A}$ が**証明可能**である，という.

1.33.　$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$

という sequent が証明可能であることを，論理式 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu$ から論理式 $\mathfrak{B}$ が**証明可能**である，という.

1.4.　$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$

という sequent が証明可能であることを

$$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$$

と表わすことにすれば［$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ は超数学的命題を表わす］，この関係 $\Rightarrow$ によって論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ は古典述語論理をなす．その意味で，LK は**古典述語計算**（classical predicate calculus）である.

1.5.　**述語計算 *LJ***　そこで用いられる sequent はすべて右辺にたかだか1個の論理式しかもたないものに限る，という制限を LK に加えて得られる述語計算（第Ⅰ編，§9，2.2 参照）．これは**直観主義の述語計算**（intuitionistic predicate calculus）である.

2.　Hilbert 式の述語計算　Hilbert 式の命題計算に対応するものとして，sequent の概念を用いない述語計算の体系を与えることもできる．それは，実質的には，LK（直観主義の述語計算ならば，LJ）と同等である．その同等性は，LK（および LJ）において，

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

という sequent が証明可能であることと，

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

という論理式が証明可能であることとが同等であることから容易に知る

ことができる．

以下に述べるのは，その一例である（第 I 編，§9，3 参照）．

2.1.　**公理**

2.101.　$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$

2.102.　$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset [(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})]$

2.111.　$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

2.112.　$\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$

2.113.　$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset [(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}]\}$

2.121.　$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$

2.122.　$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$

2.123.　$(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset \{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset [\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})]\}$

2.131.　$[\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})] \supset \mathfrak{B}$

2.132.　$[(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{B}] \supset [\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})]$

2.141.　$(\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{A}) \supset \curlywedge$

2.142.　$[(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{C}) \supset \curlywedge] \supset (\mathfrak{C} \supset \neg\mathfrak{A})$

2.15.　$\forall x \mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{F}(t)$

2.16.　$\mathfrak{F}(t) \supset \exists x \mathfrak{F}(x)$

2.171.　$\mathfrak{A} \supset \curlyvee$

2.172.　$\curlywedge \supset \mathfrak{A}$

2.18.　$\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$

2.2.　**推論規則**

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

$$\frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}(a)}{\mathfrak{A} \supset \forall x \mathfrak{F}(x)} \qquad \frac{\mathfrak{F}(a) \supset \mathfrak{A}}{\exists x \mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A}}$$

ただし，あとの二つについては，つぎの変数条件を考慮に入れる必要がある．

変数条件　a によって表わされている自由変数は，その推論規則によって導かれる論理式に含まれていてはいけない．

2.3.　**証明可能性**の定義は，1.31 と全く同様である．ただ，sequent ということばの代わりに論理式ということばを用いるだけである．

2.4.　ここにあげたのは**古典述語計算**の体系である．**直観主義の述語計算**の体系を得るには，公理より 2.18 を除けばよい．

3.　上の 2 で述べたのは，あくまでも Hilbert 式の述語計算の一例にすぎない．公理の与え方はこれ以外にもいろいろある．

その最も簡単な方法は，tautology の概念を利用する方法である．Tautology という概念は純粋に syntactical に定義される概念であるから（第Ⅰ編，§4，4），述語計算の体系を定義するのに利用することは一向にさしつかえない．

3.1.　Tautology というのは命題計算における論理式である．それは，一般には，$\boldsymbol{L}$ の元ではない．しかし，そのなかのすべての命題変数に $\boldsymbol{L}$ の任意の元を［同一の命題変数には同一の元を］代入すれば $\boldsymbol{L}$ の元が得られる．このようにして得られた $\boldsymbol{L}$ の元（＝述語論理の論理式）を **tautologous な**論理式とよぶ．

3.2.　さて，つぎのようにしても，古典述語計算が得られる．

3.21. **公理**　それは，つぎの 3.211—3.213 にあげるすべての論理式である：

3.211.　任意の tautologous な論理式．

3.212.　$\forall x\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{F}(t)$ という形の任意の論理式．

3.213.　$\mathfrak{F}(t) \supset \exists x\mathfrak{F}(x)$ という形の任意の論理式．

3.22. **推論規則**

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \qquad \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}(a)}{\mathfrak{A} \supset \forall x\mathfrak{F}(x)} \qquad \frac{\mathfrak{F}(a) \supset \mathfrak{A}}{\exists x\mathfrak{F}(x) \supset \mathfrak{A}}$$

この $\forall$ および $\exists$ に関する推論規則に対しては，a に関する**変数条件**がある（2.2 におけるのと同じ）．

3.3.　このようにして定義された述語計算が 2 で与えられた体系と同等であることは，つぎの 3.31，3.32 に注意すれば明らかである：

3.31. 任意の tautologous な論理式は，2 における体系で証明可能である．

それは，2 の体系で

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

が証明可能であるということ［そういう超数学的命題］を

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

と表わすことにすれば，この →によって論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ が古典命題論理（第I編，§7 の意味における古典論理）になっていることから容易に知ることができる．

3.32. まえの 2.1 にあげた公理 2.101—2.142 および 2.171—2.18 はすべて tautologous である．

3.4. Tautologous な論理式がすべて公理に採用されていても，modus ponens という推論規則はやはり必要である．それは，3.22 における modus ponens を表わす schema での $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ として，∀ や ∃ を含む論理式を用いた場合，tautologous でない論理式 $\mathfrak{B}$ が導かれることもあるからである．

例 $\mathfrak{F}(t)$ が tautologus ならば $\exists x\mathfrak{F}(x)$ は証明可能：

$$\frac{\mathfrak{F}(t) \quad \mathfrak{F}(t) \supset \exists x\mathfrak{F}(x)}{\exists x\mathfrak{F}(x)}.$$

しかも，$\exists x\mathfrak{F}(x)$ は modus ponens なしでは証明しえない．何となれば，$\exists x\mathfrak{F}(x)$ は公理でもなく，また，∀ や ∃ に関する推論規則による結論ともなりえないから．

このようなことは，2.1 の公理についてもいいうる．そこの公理における $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, 等は $\boldsymbol{L}$ に属する**任意の**論理式である．2.1 における公理が命題計算の公理と本質的に異なるのは，何も 2.15, 2.16 のみではない．

3.5. これと同様な方法で直観主義の述語計算の体系を与えるには，〈tautologous な論理式〉というものの代わりに，直観主義の命題計算で証明可能な論理式から得られる述語論理の論理式を用いればよい．

全く同様な考え方から，一つの命題計算の体系が与えられれば，それに対応する述語計算の体系というものを考えることが可能となる．

4. 論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ を固定して考える限り，$\boldsymbol{L}$ から作られる述語計算において

(*)　　　$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$

が証明されるならば［Hilbert 式の述語計算においては，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ が証明されるならば］，この (*) という関係は，$\boldsymbol{L}$ から作られるあらゆる述語論理において成立する．

何となれば，LK［直観主義論理の場合には，LJ］の公理ならびに推

論規則のすべては，あらゆる述語論理において成立するものばかりだからである．

練 習 問 題

1. $$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{B}_\nu$$
を論理記号 $\supset$ を含まぬ sequent とし，この sequent を
$$\mathfrak{B}_\nu,\ \cdots,\ \mathfrak{B}_2,\ \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}_\mu,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1$$
と逆の順序に並べかえ，さらに，$\wedge$ と $\vee$，$\forall$ と $\exists$ とを入れかえて得られる sequent を，最初の sequent の**双対**という．

$\supset$ を含まぬ sequent が LK で証明可能ならば，その双対もまた LK で証明可能である（**双対の原理**）．

2. LK においては
$$\exists x \mathfrak{F}(x) \to \neg \forall x \neg \mathfrak{F}(x) \quad \text{および} \quad \neg \forall x \neg \mathfrak{F}(x) \to \exists x \mathfrak{F}(x)$$
という形の sequent はともに証明可能である．

3. LK において，$\exists x \mathfrak{F}(x)$ を
$$\neg \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$$
の略記号と考えるならば，$\exists$-左 および $\exists$-右 という推論規則も，$\forall$ および $\neg$ に関する推論規則ならびに構造に関する推論規則の組み合わせによって代用することができる．

4. 2 および 3 に述べたのと双対的な事実もまた成立するということを確認せよ．

5. LK および LJ において，$\forall$-左 という推論規則は
$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ \forall x \mathfrak{F}(x)}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(t)}$$
という推論規則と同等である［LJ においては，Θ は空］．

注意 このことは，$\forall$-左 という推論規則が［右辺における］$\forall$ **の除去**を意味することを示している．

6. LK および LJ において，$\exists$-左という推論規則は
$$\frac{\Gamma \to \Theta,\ \exists x \mathfrak{F}(x) \quad \mathfrak{F}(a),\ \Delta \to \Lambda}{\Gamma,\ \Delta \to \Theta,\ \Lambda}$$
という推論規則と同等である（**$\exists$ の除去**）．ただし，a によって表わされる自由変数は $\Gamma,\ \Delta \to \Theta,\ \Lambda$ には含まれないものとし（変数条件），LJ においては Θ は空であるとする．

§6. 数学的理論の形式化

ある一つの数学的理論を，述語論理の方法によって，形式的に記述しようとする場合には，まず，その理論に現われる命題を論理式として表現するに十分な

対象記号　　関数記号　　述語記号

の list を選定する．もっとも，その list の選択には，種々の目的に応ずる多くの自由度が残されてはいるが，ここでは，その list が一種類定められたとして話をすすめる．そして，その list によって決定される論理式の全体からなる集合 $\boldsymbol{L}$ を一つ固定して考える．

1. おのおのの数学的理論には，それぞれ，その理論に特有の公理というものがある．公理はすべて閉じた論理式 —— 自由変数を含まぬ論理式 —— によって表わされているとする．

普通には，開いた論理式 —— 自由変数を含む論理式 —— によって公理を表わすことがある．たとえば，＝に関する推移律は，自由変数 a, b, c を用いて

$$(a=b \wedge b=c) \supset a=c$$

と表わされる．しかし，これの意味するところは，実質的には

$$\forall x \forall y \forall z[(x=y \wedge y=z) \supset x=z]$$

ということである．

今後，われわれが**公理系** (axiom system) とよぶのは，閉じた論理式の集合である．そして，公理系が一つ定められているときには，その公理系に属する個々の論理式を**公理** (axiom) とよぶ．

公理系 $\boldsymbol{A}$ が一つ与えられたとき，適当な有限個の公理 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_\mu$ に対して，

$$\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

という sequent が述語計算において証明可能であるとき，論理式 $\mathfrak{B}$ は，公理系 $\boldsymbol{A}$ をもつ**形式的な理論** (formal theory) における**定理** (theorem) を意味する．このとき $\mathfrak{B}$ は，その**形式的理論において証明可能**であるとか，公理系 $\boldsymbol{A}$ **から**［あるいは，公理系 $\boldsymbol{A}$ **のもとで**］**証**

明可能である，といわれる．

形式的理論は，述語計算の体系と公理系とを与えることによって決定される．

以下，話を確定的にするために，述語計算の体系は LK としておく．しかし，すべての議論は，述語計算として LJ を採用した場合にも，そのまま通用する．

2. 一つの公理系 $\boldsymbol{A}$ を与えたとき，$\boldsymbol{A}$ によって決定される（古典）述語論理 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ というものを考えることができる〔述語計算の体系が LJ のときには，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ は直観主義の述語論理となる〕．

2.1. $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ とは論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ から作られる述語論理である．そこで，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ を定義するためには，論理式 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ の間の関係

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

というものを定義しなければならない．

$\boldsymbol{L}$ において

$$(*) \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が成立するというのは，公理（$=\boldsymbol{A}$ の元）の適当な有限列 Γ を選ぶことによって，

$$(\sharp) \qquad \mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$$

という sequent が LK で証明可能になることとする．

このように (*) という関係を定義すれば，その → によって $\boldsymbol{L}$ が述語論理となることが示される (2.10—2.13)．そして，その述語論理を $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ と表わすのである．

2.10. まず，sequent

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が LK で証明可能ならば，これを $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ における関係と考えた場合には，それは成立することになる．何となれば，(♯) における Γ として（たとえば）空の列をとればよいからである．

このことから直ちに，§4 の 3 における，反射律，$\wedge$-左，$\vee$-右，$\supset$-左，$\neg$-左，$\forall$-左，$\exists$-右，V の性質，$\curlywedge$ の性質，排中律が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ において成立することがわかる．ここで，V および $\curlywedge$ は，任意の論理式 $\mathfrak{D}$ を固定した上で，それぞれ，$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}$ および $\mathfrak{D} \wedge \neg\mathfrak{D}$ を意味す

るものと考える［しかも，述語計算を LJ としたときは，排中律は除かれる］．

2.11. 推移律，$\wedge$-右，$\vee$-左，$\supset$-右，$\neg$-右 はすべて同様であるから，推移律と $\wedge$-右 についてのみ説明する．

2.111. 推移律． $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ および $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ が成立するという仮定のもとに $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ が成立することを示す：

$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ および $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ が成立するということから，公理の有限列 Γ および Δ が存在して，

$$\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B} \quad \text{および} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \mathfrak{C}$$

という sequent が LK で証明可能である．よって，

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}} \ \text{cut}$$

とすることによって，

$$\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}$$

という sequent も証明可能．しかも，Γ と Δ とを並べた

$$\Gamma, \Delta$$

も公理の有限列であるから，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ は成立する．

2.112. $\wedge$-右． $\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ および $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ が成立するということから，公理の有限列 Γ および Δ が存在して，

$$\mathfrak{C}, \Gamma \to \mathfrak{A} \quad \text{および} \quad \mathfrak{C}, \Delta \to \mathfrak{B}$$

が証明可能である．そのときは，

$$\mathfrak{C}, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \quad \text{も} \quad \mathfrak{C}, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$$

もともに証明可能となり，LK の推論規則 $\wedge$-右 によれば，

$$\mathfrak{C}, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$$

も証明可能である．よって，$\mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ は成立する．

2.12. $\forall$-右． $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{F}(x)$ に自由変数 a が含まれないという条件つきで，$\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(a)$ が成立するという仮定から $\mathfrak{A} \to \forall x \mathfrak{F}(x)$ が成立することを導く．

$\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(a)$ が成立するということから，公理の有限列 Γ が存在し，

$$\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{F}(a)$$

が証明可能．Γ は公理の有限列で，**公理は閉じた論理式であるから，** a は Γ には含まれない．それと最初の条件とを合わせれば，結局 a は

$$\mathfrak{A}, \Gamma \to \forall x\, \mathfrak{F}(x)$$

に含まれないことになり，LK の推論規則∀-右によって，この sequent は証明可能となる．したがって，所要の結論が得られる．

2.13. ∃-左． 2.12 と全く同様．

2.2. 論理式 $\mathfrak{A}$ が公理系 $\boldsymbol{A}$ から証明可能であるということは，$\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元ということにほかならない．

ここで，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元とは，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ を擬順序 → による擬順序集合と考えての最大元の意味である．

証明 $\mathfrak{A}$ が公理系 $\boldsymbol{A}$ から証明可能ならば，公理の有限列 Γ が存在して，

$$\Gamma \to \mathfrak{A}$$

が LK で証明可能．よって，任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対して

$$\mathfrak{B},\ \Gamma \to \mathfrak{A}$$

が LK で証明可能．すなわち，任意の $\mathfrak{B}$ に対して

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$$

が成立するから，$\mathfrak{A}$ は $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元．

逆に，$\mathfrak{A}$ を$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元とすれば，任意の $\mathfrak{B}$ に対して

$$\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$$

が成立し，したがって，公理の有限列 Γ が存在して，

$$\mathfrak{B},\ \Gamma \to \mathfrak{A}$$

が LK で証明可能．そこで，$\mathfrak{B}$ として，あらかじめ LK で証明可能な論理式を採用しておけば，

$$\to \mathfrak{B}$$

が LK で証明可能であるのだから［このような $\mathfrak{B}$ は存在する．たとえば，$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}$］，

$$\frac{\to \mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \mathfrak{A}}{\Gamma \to \mathfrak{A}}\ \text{cut}$$

とすることにより，

$$\Gamma \to \mathfrak{A}$$

が LK で証明可能．Γ は公理の有限列であったから，$\mathfrak{A}$ は公理系 $\boldsymbol{A}$ から証明可能．（証明終わり）

2.3. こんどは逆に，論理式の集合 $\boldsymbol{L}$ から作られる任意の述語論理

を，適当な公理系 $\boldsymbol{A}$ を選ぶことによって，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ と考えることができる，ということを示そうと思う．

まず，ある関係 → によって $\boldsymbol{L}$ が述語論理をなしているとする．そのとき，その述語論理における最大元 [$\boldsymbol{L}$ を → による擬順序集合と考えての最大元] となるような閉じた論理式の全体を公理系 $\boldsymbol{A}$ とすると，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ は与えられた述語論理と同一の述語論理となる．

そのことを示すには，与えられた述語論理において

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

が成立することと，$\boldsymbol{A}$ の元の適当な有限列 Γ に対して

$$\mathfrak{A},\ \Gamma \to \mathfrak{B}$$

という sequent が証明可能であるということが同値であることを証明すればよい．

2.31. 論理式 $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ には，一般に自由変数が含まれている．いま，$\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ に，$a_1, \cdots, a_n$ 以外の自由変数が含まれていないという意味で，それらをそれぞれ

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n) \quad \text{および} \quad \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

と表わしておく．

与えられた述語論理において

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

すなわち

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n) \to \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

が成立するとする．しからば

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n) \supset \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

という論理式は，その述語論理における最大元である．よって，その述語論理において，任意の論理式 $\mathfrak{C}$ に対し

$$\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n) \supset \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

が成立する．ここで，$\mathfrak{C}$ として $\boldsymbol{A}$ の元をとる [$\boldsymbol{A}$ の元は少なくとも一つ存在する．たとえば，任意の閉じた論理式 $\mathfrak{D}$ に対して，$\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}$ は $\boldsymbol{A}$ の元である]．そうすると，$\mathfrak{C}$ は自由変数 $a_1, \cdots, a_n$ を含まないから，∀-右 を n 回適用することによって，

$$\mathfrak{C} \to \forall x_1 \cdots \forall x_n [\mathfrak{A}(x_1, \cdots, x_n) \supset \mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n)]$$

もまた，与えられた述語論理において成立する．さて，$\boldsymbol{A}$ の定義によ

り，$\mathfrak{C}$ は最大元である．したがって，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n [\mathfrak{A}(x_1, \cdots, x_n) \supset \mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n)]$$

も最大元であり，しかも閉じた論理式であるから，これは $\boldsymbol{A}$ の元である．そのことがわかれば，あとは

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n),\ \forall x_1 \cdots \forall x_n [\mathfrak{A}(x_1, \cdots, x_n) \supset \mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n)] \rightarrow \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

という sequent の証明可能性より，

$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_n) \rightarrow \mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_n)$$

が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ において成立することがすぐにわかる．

2.32．逆に，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ において

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$$

という関係が成立していたとする．すなわち，$\boldsymbol{A}$ の元の有限列 $\mathfrak{C}_1$，$\cdots$，$\mathfrak{C}_\nu$ が存在して，

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{C}_1,\ \cdots,\ \mathfrak{C}_\nu \rightarrow \mathfrak{B}$$

が LK で証明可能であったとする．いま，

$$\mathfrak{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{C}_\nu$$

という論理式を $\mathfrak{C}$ とおくと，$\mathfrak{C}$ は与えられた述語論理 —— それを $\boldsymbol{L}^*$ と名づける —— の最大元である．

何となれば，$\mathfrak{C}_1$，$\cdots$，$\mathfrak{C}_\nu$ は $\boldsymbol{A}$ の元，すなわち $\boldsymbol{L}^*$ の最大元．したがって，任意の論理式 $\mathfrak{E}$ に対して，

$$\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}_i \quad (i=1, \cdots, \nu)$$

のすべてが $\boldsymbol{L}^*$ において成立する．ゆえに，

$$\mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{C}_\nu$$

もまた $\boldsymbol{L}^*$ において成立する．ここで，$\mathfrak{E}$ は任意の論理式であったから，$\mathfrak{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{C}_\nu$ すなわち $\mathfrak{C}$ は $\boldsymbol{L}^*$ の最大元である．

要するに，$\boldsymbol{L}^*$ の最大元 $\mathfrak{C}$ を適当にとれば，

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B}$$

すなわち，

$$\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$$

が LK において証明可能である．さて，この sequent が証明可能である以上，これを $\boldsymbol{L}^*$ における関係式と考えれば［$\boldsymbol{L}^*$ が古典述語論理である限り］この関係は $\boldsymbol{L}^*$ でも成立する（§5，4）．ここで，$\mathfrak{C}$ が $\boldsymbol{L}^*$

の最大元であることに注意すれば，$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ も $\boldsymbol{L}^*$ の最大元である．すなわち，

$$\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

という関係が $\boldsymbol{L}^*$ において成立する．

2.4. 以上によってわかったことは，$\boldsymbol{L}$ という論理式の集合が与えられた場合，$\boldsymbol{A}$ という公理系を与えれば，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ という $\boldsymbol{L}$ から作られる一つの述語論理が定まり，また，$\boldsymbol{L}$ から作られる任意の述語論理は，必ず，適当な公理系 $\boldsymbol{A}$ を選ぶことによって，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ と表わされる，ということである．

この意味において，述語計算というものが，述語論理を表現する枠としては十分なものである，と考えることができる．

3. 公理系の無矛盾性・完全性

3.1. 公理系 $\boldsymbol{A}$ が**矛盾**を含むというのは，$\mathfrak{A}$ およびその否定 $\neg\mathfrak{A}$ がともに $\boldsymbol{A}$ から証明可能となるような論理式 $\mathfrak{A}$ が存在することをいうのである．

公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含まないとき，$\boldsymbol{A}$ は**無矛盾**（non-contradictory, consistent）であるといわれる．

3.11. $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含めば，ある論理式 $\mathfrak{A}$ に対して，$\mathfrak{A}$ および $\neg\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{A}$ から証明可能であるから，適当な公理の有限列 Γ および Δ が存在して，

$$\Gamma \to \mathfrak{A} \quad \text{および} \quad \Delta \to \neg\mathfrak{A}$$

が $\boldsymbol{LK}$ で証明可能となる．よって，任意の論理式 $\mathfrak{B}$ に対して，

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A},\ \Gamma \to}\ \neg\text{-左}}{\Delta,\ \Gamma \to}\ \text{cut}}{\Delta,\ \Gamma \to \mathfrak{B}}$$

とすることにより，$\mathfrak{B}$ もまた $\boldsymbol{A}$ から証明可能である．

すなわち，公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含めば，$\boldsymbol{A}$ から任意の論理式が証明可能となる．

逆に，公理系 $\boldsymbol{A}$ から任意の論理式が証明可能ならば，$\mathfrak{A}$ も $\neg\mathfrak{A}$ もすべて証明可能であるから，結局

公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含むということは，$\boldsymbol{A}$ から任意の論理式が証明

> 可能となることである

ということができる.

3.12. 公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含むということは, 任意の論理式が述語論理 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元となることである (2.2). また, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の任意の元が最大元であるとは, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ が trivial な述語論理であるということを意味するから (§4, 3.131),

> 公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含むということは, $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ が trivial な述語論理となることである

ということもできる.

3.13. 以上を**無矛盾性** (consistency) に関して述べなおしてみれば, つぎのようになる:

> 公理系 $\boldsymbol{A}$ が無矛盾であるとは, $\boldsymbol{A}$ から証明可能でない論理式が少なくとも一つ存在するということであり, また述語論理 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ が trivial なものにならないということである.

3.2. 任意の閉じた論理式 $\mathfrak{A}$ に対して, $\mathfrak{A}$ または $\neg\mathfrak{A}$ のいずれか一方が必ず公理系 $\boldsymbol{A}$ から証明可能であるとき, 公理系 $\boldsymbol{A}$ は**完全** (complete) であるといわれる.

公理系 $\boldsymbol{A}$ が矛盾を含めば, それからすべての論理式が証明可能となるから, $\boldsymbol{A}$ はもちろん完全である.

3.21. 公理系 $\boldsymbol{A}$ が完全であれば, 閉じた論理式 $\mathfrak{A}$ はすべて, 述語論理 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元か最小元のいずれかになる.

> $\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{A}$ から証明可能ならば, $\mathfrak{A}$ は $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元(2.2). もし $\neg\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{A}$ から証明可能ならば, $\neg\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元となり, それは, $\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最小元であることを意味する.

逆に, 任意の閉じた論理式 $\mathfrak{A}$ のすべてが $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元・最小元のいずれかに分けられているならば, 公理系 $\boldsymbol{A}$ は完全である.

> もし $\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元ならば, $\mathfrak{A}$ は $\boldsymbol{A}$ から証明可能 (2.2). また, $\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最小元ならば, $\neg\mathfrak{A}$ は $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A})$ の最大元で, これが証明可能となる.

3.22. われわれの与えうる公理系のうち, そのなかに自然数の理論を含み, しかも実際に無矛盾であるもののほとんどすべては完全な公理系とはなりえない, ということがすでに知られている. いわば, われわれ

にとって有意義な公理系の多くは，すべて**不完全**（incomplete）なのである．この事実は，**Gödel の不完全性定理**（incompleteness theorem）として広く知られているものである．

不完全性定理の存在にもかかわらず〈完全性〉の問題は，〈無矛盾性〉の問題とともに，やはり数理論理学における中心的な興味ある問題ということができる．

ここで，〈われわれの与えうる公理系〉といったのは，たとえば，ある述語論理の最大元となる閉じた論理式の全体というようなものではない．そのような公理系では，かってに与えられた閉じた論理式が，はたして実際に公理であるかどうかということを，われわれはほとんど知りえないからである．われわれが一つの理論を展開するときの基礎とする公理系は，もっと具体的に与えられていなければならない．ここで〈われわれの与えうる公理系〉といったのは，その意味をこめて言っているのである．

ここで述べた〈公理系の完全性〉とは別に，**述語計算の完全性**というものがある．それは，§4 の **1** に述べたようなあらゆる解釈に対してつねに真な命題を表わす論理式は，じつは古典述語計算において証明可能である，ということを主張する．これもまた Gödel により初めて示された事実で，**Gödel の完全性定理**（completeness theorem）とよばれている．

§5 の **4** によれば，その特別な場合として，述語計算で証明可能な論理式があらゆる解釈において真な命題に対応する，ということがわかる．完全性定理は，この逆を主張する．

この完全性定理の証明には，semantical にやや超限的な論法を用いなければならないということもあって，数理論理学の入門書として，基本概念の解説のみを目的とする本書においては，残念ながら，これを割愛せざるをえなかったのである．

練 習 問 題

1. P を 1 変数の述語記号とし，任意の論理式 $\mathfrak{A}$ のなかの $\forall x \mathfrak{F}(x)$ という形の部分をすべて $\forall x(P(x) \supset \mathfrak{F}(x))$,

$$\exists x\mathfrak{F}(x) \text{ という形の部分をすべて } \exists x(P(x) \wedge \mathfrak{F}(x))$$

と書きかえて得られる論理式を $\mathfrak{A}^{(P)}$ と表わし，$\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}^{(P)}$ を作ることを quantifier の［P による］**相対化** (relativization) という．

Quantifier の相対化の概念を，論理式の構成の順序に従って，帰納的に定義せよ．

2. 論理式 $\mathfrak{A}$ が

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \mathfrak{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

という形で，$\mathfrak{B}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のなかにもはや quantifier が一つも含まれていないとき，$\mathfrak{A}$ は **∀-prenex** な論理式であるといわれる．

$\mathfrak{A}$ が ∀-prenex な論理式ならば，

$$\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^{(P)}$$

という sepuent は（LK においても，また LJ においても）証明可能である．

3. **∃-prenex** という概念を定義し，前問と双対的な事実を述べ，それを証明せよ．

4. f を n 変数の関数記号とするとき，

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n [(P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n)) \supset P(f(x_1, \cdots, x_n))]$$

という論理式を

$$P[f]$$

という記号で表わす．

Term t に現われる

対象記号のすべてを　$e_1, \cdots, e_\rho$

自由変数のすべてを　$a_1, \cdots, a_\sigma$

関数記号のすべてを　$f_1, \cdots, f_\tau$

とすれば ($\rho, \sigma, \tau \geqq 0$)，

$$P(e_1), \cdots, P(e_\rho), P(a_1), \cdots, P(a_\sigma),\ P[f_1], \cdots, P[f_\tau] \rightarrow P(t)$$

という sequent は証明可能である．

5. $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_\nu$

という sequent に現われる対象記号・自由変数・関数記号のすべてを，それぞれ $e_1, \cdots, e_\rho$; $a_1, \cdots, a_\sigma$; $f_1, \cdots, f_\tau$ とするとき，

$$\mathfrak{A}_1^{(P)}, \cdots, \mathfrak{A}_\mu^{(P)}, P(e_1), \cdots, P(e_\rho), P(a_1), \cdots, P(a_\sigma), P[f_1], \cdots, P[f_\tau],\ \exists x P(x) \rightarrow \mathfrak{B}_1^{(P)}, \cdots, \mathfrak{B}_\nu^{(P)}$$

という sequent のことを，与えられた sequent の（P による）**相対化**とよぶ．

$\mathfrak{S}$ という sequent が LK（または LJ）で証明可能ならば，P による $\mathfrak{S}$ の相対化 $\mathfrak{S}^{(P)}$ もまた LK（または LJ）で証明可能である．

6. $\boldsymbol{A}$ を与えられた公理系とするとき，つぎの 1)—4) に述べるようなすべての論理式からなる公理系を，述語記号 P による $\boldsymbol{A}$ の**相対化**とよび，$\boldsymbol{A}^{(P)}$ という記号で表わす：

1) $\boldsymbol{A}$ の任意の公理 $\mathfrak{A}$ に対する $\mathfrak{A}^{(P)}$.

2) $\boldsymbol{A}$ の公理に現われる任意の対象記号 e に対する $P(e)$.

3) $\boldsymbol{A}$ の公理に現われる任意の関数記号 f に対する $P[f]$.

4) $\exists xP(x)$.

いま，閉じた論理式 $\mathfrak{B}$ が公理系 $\boldsymbol{A}$ から証明可能ならば，述語記号 P による quantifier の相対化によって $\mathfrak{B}$ より得られる論理式 $\mathfrak{B}^{(P)}$ は，$\boldsymbol{A}$ の相対化 $\boldsymbol{A}^{(P)}$ から証明可能である．

7. 公理系 $\boldsymbol{A}^{(P)}$ が無矛盾であれば，$\boldsymbol{A}$ もまた無矛盾である．

8. 公理系 $\boldsymbol{A}^{(P)}$ が無矛盾ならば，$\boldsymbol{A}^{(P)}$ に

$$\forall xP(x)$$

という公理をつけ加えて得られる公理系も無矛盾である．

9. 任意の論理式 $\mathfrak{A}$ に対して

$$\forall xP(x) \to \mathfrak{A}^{(P)} \sim \mathfrak{A}$$

は証明可能である．

10. 7 とは逆に，公理系 $\boldsymbol{A}$ が無矛盾のとき，もし述語記号 P が $\boldsymbol{A}$ のいかなる公理にも現われないならば，$\boldsymbol{A}^{(P)}$ もまた無矛盾である．

解答およびヒント

I．命　題　論　理

§ 1.

7.　$(A|A)|(B|B)$

§ 2.

1. $a \vee \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \vee b_\lambda)$ については

1)　$a \vee b_\lambda \leq a \vee \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$

2)　$a \vee b_\lambda \leq c \quad (\lambda \in \Lambda)$　ならば　$a \vee \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq c$

を証明すればよい．

3. A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の和集合 V，共通部分 D について，V も D も 2^S の元で，しかも $\{A_\lambda ; \lambda \in \Lambda\}$ の上限および下限となることを示す．

5.　定理 8 の証明と同様．

6.　$a \wedge \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a \wedge b_\lambda)$　については

1)　$a \wedge b_\lambda \leq a \wedge \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b \quad (\lambda \in \Lambda)$

2)　$a \wedge b_\lambda \leq c \quad (\lambda \in \Lambda)$　ならば　$a \wedge \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq c$

を証明する．1) は明らか．2) においては，$a \wedge b_\lambda \leq c$ より $b_\lambda \leq a^c \vee c$ を導き，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq a^c \vee c$ を得る．そして，もういちど

$a \wedge \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq a \vee (a^c \vee c) \leq c$ とすればよい．

§ 3.

1. $\neg A \wedge B$ は disjunctive normal form でも conjunctive normal form でもある．

Principal disjunctive normal form：

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C).$$

Principal conjunctive normal form :

$$(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C).$$

2. Principal disjunctive normal form :

$$(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B).$$

Principal conjunctive normal form : $A\vee B$.

3. 本文の **1** で定義した（本来の意味での）elementary conjunction.

4. $0\leq a\frown x\leq a$ より $a\frown x=a$ または $a\frown x=0$. $a\frown x=a$ ならば $a\leq x$. また，$a\frown x=0$ ならば

$$a=a\frown a\leq a\frown(x\smile y)=(a\frown x)\smile(a\frown y)\leq y.$$

6. $[x]\smile[x^c]=[x\smile x^c]=[1]$. $[x]\frown[x^c]=[x\frown x^c]=[0]$.

7. A の有限部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_\nu\}$ に対しては，
$x=a_1\smile a_2\smile\cdots\smile a_\nu$ とすればよい.

8. 元 x から作られる集合 $[x]$ の元の個数に関する数学的帰納法. $a\in[x]$ とすれば，$[x\frown a^c]\subseteq[x]$ で $a\notin[x\frown a^c]$ であるから，$[x\frown a^c]$ の元の個数は $[x]$ よりも少ない.

§ 4.

1. ある命題変数 A とその否定 $\neg A$ を同時に含む.

2. そこに現われるすべての elementary disjunction が tautology となる.

3. 空な conjunction.

4. 本来の意味でのすべての elementary conjunction を含む.

§ 5.

2. ±1.　**3.** 最小公倍数，最大公約数.　**4.** 素数.

6. $a<b$ と $b<a$ は同時に成立しないか，または，もし成立するとすれば $a=b$.

§ 6.

1. $\neg A\wedge A\rightarrow$ 人 に 1.55 を適用する.

2. $\neg\neg A\wedge(A\vee\neg A)\rightarrow A$ を証明する．または，

$$A\rightarrow\neg\neg A\supset A \quad と \quad \neg A\rightarrow\neg\neg A\supset A$$

の二つを証明する.

3. $A \to B$ より $A \wedge \neg B \to 人$ を導き, 1.55 を適用.

5. 1) 1 より $\neg A \to \neg\neg\neg A$. および $A \to \neg\neg A$ の対偶.

2) $A \to A \vee \neg A$, $\neg A \to A \vee \neg A$ の対偶を考える.

3) 2 の結果の対偶を2回作る.

6. $A \wedge C \to B$ が $C \to A \supset B$ の必要十分条件であることを繰り返し用いる.

7. 1.2) $A \wedge (A \supset B) \wedge (B \supset C) \to C$ を証明する.

2.3) $C \wedge (C \supset A) \wedge (C \supset B) \to A \wedge B$.

3.3) $A \to [(A \supset C) \wedge (B \supset C)] \supset C$,

$B \to [(A \supset C) \wedge (B \supset C)] \supset C$.

4.2) $A \wedge C \wedge [(A \wedge C) \supset B] \to B$

9. 5 の 2) と 8 を用いる.

10. つぎの 1), 2) を示す.

1) $a \cap b_\lambda \leq a \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$.

2) $a \cap b_\lambda \leq c \quad (\lambda \in \Lambda)$ ならば $a \cap \bigcup_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \leq c$.

この 2) を示すには, $a \cap b \leq c$ と $a \leq b \supset c$ が同値であることを利用する.

§ 7.

5. Ｙ という命題に $\vee$, $\wedge$, $\supset$ という演算をどう適用しても Ｙ しか得られない, ということによる.

8. $B = 人$ とおいてみる.

9. Peirce の法則では, $A = X \vee \neg X$, $B = 人$ とおき, $(X \vee \neg X) \supset 人 \equiv 人$ に注意する. 細井君の例では, $B = 人$ とおき〈二重否定の除去法則〉を導く. 直観主義論理でも排中律の二重否定は成り立つから [§6, 練習問題, 5 の 2)], それにより排中律がでる.

§ 8.

3. $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ という五つの元をもつ集合 L に $0 < \alpha < \gamma < 1$, $0 < \beta < \gamma < 1$ と順序を定義し, α と β とは比較不可能としておく. これが相対擬補束となることを示し, $\neg(\alpha \cap \beta)$ と $\neg\alpha \cup$

$\neg\beta$ を求める.

4. $B=A$ とおく.

6.

$$\cfrac{\cfrac{A,\ A\supset(A\supset B)\to B}{A\supset(A\supset B)\to A\supset B}\ \supset\text{-右} \quad A,\ A\supset(A\supset B)\to B}{(A\supset B)\supset A,\ A\supset(A\supset B)\to B}\ \supset\text{-左}$$

10. 新しい推論規則が直観主義論理で正しいことは, §6 の練習問題の 4 を用いる.

$\neg$ に関する推論規則なしでも, LJ から最大元の存在はわかる [例えば, $D\supset D$]. その一つを $\curlyvee$ とおけば, $\to\curlyvee$. これと新しい推論規則を用いて

$$A,\ \neg A\to\neg\curlyvee \quad \text{および} \quad \frac{A,\ \Gamma\to\neg\curlyvee}{\Gamma\to\neg A}$$

を示すことができる. $\neg\curlyvee$ を 人 と書くことにすればよい.

12. 負の整数の全体は, 普通の大小関係によって, 相対擬補束をなし, しかも最小元をもたない.

§ 9.

1. $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ をすべて $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ でおきかえればよい.
3. $A\wedge\neg A\to$ は証明可能であるが, 双対は排中律.
5. 排中律以外は明らか. 排中律の二重否定も証明可能.
6. 4 と 5 による.
7. $\neg\neg\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}$ による.
8. 論理式に含まれる $\wedge$ の個数に関する数学的帰納法. 論理式が $\neg\mathfrak{A}$ という形のときは明らか (前問). 論理式が $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ という形のときは, $\mathfrak{A}$ および $\mathfrak{B}$ について帰納法の仮定を用いることができる.

II. 述 語 論 理

§ 1.

5. 対象領域を自然数の全体とし, $F(x,y)$ を $x<y$ と考える.
8. $A\supset B$ という形を $\neg A\vee B$ に変形すればよい.

§ 3.

1. $\forall x\{(x \geqq 4 \wedge 2|x) \supset \exists y \exists z[x=y+z \wedge (\mathrm{Prim}\, y \wedge \mathrm{Prim}\, z)]\}$.

2. 1) $\forall x(M(x) \supset x \leq a)$

   2) $\exists y \forall x(M(x) \supset x \leq y)$

   3) $\forall x(M(x) \supset x \leq a) \wedge \forall y[\forall x(M(x) \supset x \leq y) \supset a \leq y]$

3. $\exists x \mathfrak{F}(x) \wedge \forall x \forall y[(\mathfrak{F}(x) \wedge \mathfrak{F}(y)) \supset x=y]$

4. 対象記号・関数記号を用いなければ,

 1) $\forall x \forall y \forall z[(xy)z=x(yz)]$

 2) $\exists z[\forall x(zx=x) \wedge \forall x \exists y(yx=z)]$

 また, 対象記号 e, 関数記号 $*^{-1}$ を用いて,

 1) $\forall x \forall y \forall z[(xy)z=x(yz)]$

 2) $\forall x(ex=x)$

 3) $\forall x(x^{-1}x=e)$

 としてもよい.

§ 4.

3. 本文 4 における例を参照.

5. $\mathfrak{F}(a)$ として, $a=s$ および $r=a$ を用いる.

7. 5 の $\mathfrak{F}(a)$ として $\varphi(s)=\varphi(a)$ を用いる.

8. $\mathfrak{F}(X)$ に現われる論理記号の個数に関する帰納法. $\mathfrak{F}(X)$ が論理記号を含むときは, $\mathfrak{F}(X)$ の形が

$$\mathfrak{G}(X) \wedge \mathfrak{H}(X),\ \mathfrak{G}(X) \vee \mathfrak{H}(X),\ \mathfrak{G}(X) \supset \mathfrak{H}(X),\ \neg \mathfrak{G}(X),$$
$$\forall x \mathfrak{G}(x, X),\ \exists x \mathfrak{G}(x, X)$$

であるというおのおのの場合に分けて考える.

9. 前問と同様.

11. 8 と同様にしてもよく, 8, 9, 10 の結果を用いてもよい.

12. 11 における $\mathfrak{F}(a)$ は

$$F(\varphi_1(a),\ \cdots,\ \varphi_n(a))$$

という形をしている.

13. 十分性は, 前問の 2) を $\varphi(a)$ に含まれる関数記号の個数に関する数学的帰納法で証明する.

§ 5.

3. ∃-左 は

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{F}(a),\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\neg\mathfrak{F}(a)}\ \neg\text{-右}}{\Gamma\to\Theta,\forall x\neg\mathfrak{F}(x)}\ \forall\text{-右}}{\neg\forall x\neg\mathfrak{F}(x),\Gamma\to\Theta}\ \neg\text{-左}.$$

§ 6.

1. 1) $\mathfrak{A}$ が論理記号を含まないときは，$\mathfrak{A}^{(P)}$ は $\mathfrak{A}$ 自身.

2) $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{C}$, $\neg\mathfrak{B}$ という形のとき，$\mathfrak{A}^{(P)}$ はそれぞれ，$\mathfrak{B}^{(P)}\wedge\mathfrak{C}^{(P)}$, $\mathfrak{B}^{(P)}\vee\mathfrak{C}^{(P)}$, $\mathfrak{B}^{(P)}\supset\mathfrak{C}^{(P)}$, $\neg\mathfrak{B}^{(P)}$.

3) $\mathfrak{A}$ が $\forall x\mathfrak{F}(x)$ または $\exists x\mathfrak{F}(x)$ という形のとき，$\mathfrak{A}^{(P)}$ はそれぞれ，$\forall x(P(x)\supset\mathfrak{F}(x)^{(P)})$ および $\exists x(P(x)\wedge\mathfrak{F}(x)^{(P)})$.

2. n に関する数学的帰納法.

4. τ に関する数学的帰納法.

5. $\mathfrak{S}$ が公理のときについて証明し，あとは $\mathfrak{S}$ の証明に用いられる推論規則の使用回数についての数学的帰納法. 最後に用いられた推論規則の種類によって分類して考える.

6. 前問による.　**7.** 前問による.

8. $\mathfrak{A}^{(P)}\to(\mathfrak{A}^{(P)})^{(P)}$ および $(\forall xP(x))^{(P)}$ が証明可能であることに注意して **7** を用いる.

10. $P(a)$ の代わりに $\forall x\mathfrak{F}(x)$ が証明可能な $\mathfrak{F}(a)$ を用いて，前問による.

索　引

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

Y

Z

――著者紹介――

前原昭二（まえはら しょうじ）

1951年　東京大学理学部数学科卒業
元 筑波大学名誉教授・東京工業大学名誉教授
理学博士

専　攻　数学基礎論

復刊　数理論理学序説

1966年 6月 5日　初版 1 刷発行
1985年 4月25日　初版 8 刷発行
2010年 9月25日　復刊 1 刷発行

著　者　前原昭二
発行者　南條光章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

NDC 410.96

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京（03）3947-2511番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷・藤原印刷株式会社　　製本・ブロケード

Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN 978-4-320-01943-0